МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

І. І. Голіченко, О. І. Клесов, О. А. Тимошенко

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА ТА ЕЛЕМЕНТИ АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 111 «Математика»,
спеціалізацією «Страхова та фінансова математика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рецензенти: *Моклячук М.П.*, доктор фіз.-мат. наук, професор
Млавець Ю.Ю., кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний редактор *Буценко Ю.П.*, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 9 від 30.05.2019 р.) за поданням Вченої ради факультету (протокол № 5 від 29.05.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Голіченко Ірина Ігорівна, к-ф. м. наук.
Клесов Олег Іванович, доктор ф.-м. наук, проф.
Тимошенко Олена Анатоліївна, к-ф. м. наук

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА ТА ЕЛЕМЕНТИ АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Фінансова математика та елементи актуарної математики: Навчальний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 111 «Математика», спеціалізації «Страхова та фінансова математика» / І. І. Голіченко, О.І. Клесов, О. А. Тимошенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,9 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 104 с.

Навчальний посібник складено відповідно до програми курсу «Фінансова математика фондового ринку». У ньому розглянуто складна та неперервна схеми нарахування відсотків, поняття майбутньої вартості вкладеної чи запозиченої сум, математичні методи аналізу грошових потоків, різні типи фінансових активів, їх властивості та представлено приклади та характеристики моделей ринків фінансових активів. Матеріали підкріплено значною кількістю розв’язаних задач, задач для самостійної роботи та тестових завдань.

Навчальний посібник розроблено для студентів та викладачів спеціальності 111 «Математика» фізико-математичного факультету.

Передмова

Необхідний рівень підготовки студентів спеціалізації «Страхова та фінансова математика» неможливо забезпечити без створення системи прикладних задач, які повинні мати професійно-направлений характер. Тільки за допомогою такої системи студент може вмотивовано досягнути свого максимального рівня підготовки для подальшої професійної діяльності.

Навчальний посібник «Фінансова математика та елементи актуарної математики» складено на основі досвіду викладання авторами на фізико-математичному факультеті за спеціалізацією «Страхова та фінансова математика». Він відповідає програмі дисципліни «Фінансова математика фондового ринку» для студентів п'ятого курсу за напрямом освітньо-професійної підготовки магістр за спеціальністю 111 «Математика».

Навчальний посібник охоплює три основні теми математики фінансів: «Основні поняття математичної теорії фінансів», «Основні види фінансових активів» та «Модель фінансового ринку з дискретним часом». Він містить розгорнутий теоретичний матеріал, який підкріплено широким спектром ретельно підібраних прикладів. Тут запропоновані задачі для аудиторної та самостійної роботи, варіанти тестових завдань та присутній корисний довідковий матеріал. Тому навчальний посібник можна ефективно застосовувати для організації самостійної роботи студентів та як допоміжний матеріал при вивчення і систематизації знань за основними темами фінансової та актуарної математики: У навчальному посібнику розглянуто питання, пов'язані з теорією відсоткових ставок, розкрито математичні методи аналізу грошових потоків, продемонстровано правила функціонування фінансових ринків, розглянуто питання купівлі та продажу різних типів цінних паперів, обчислення справедливих цін, розібрано моделі фінансових ринків з дискретним часом.

В цілому, даний посібник буде корисним всім бажаючим вивчити основні інструменти фінансової та актуарної математики.

Зміст

РОЗДІЛ 1.
Основні поняття математичної теорії фінансів

На практиці фінансові операції завжди пов’язані із фактором часу. Гроші, покладені на депозит у банк, через рік принесуть дохід власнику рахунку. Цей дохід можна інвестувати для подальшого нарощення капіталу або витратити на поточні потреби. Це один із можливих прикладів, який показує, що цінність грошей із часом змінюється. Зазвичай інвестування грошей у будь-яку сферу людської діяльності викликано прагненням через деякий час отримати назад збільшену суму. Однак завжди існує ризик, хоча і незначний, що гроші ніколи не будуть отримані.

Те, як гроші змінюють свою цінність у часі, є складним питанням, що має фундаментальне значення у фінансах. Аналіз та розрахунок будь-якої фінансової операції починається із приведення всіх платежів, які здійснені в довільні моменти часу, до одного моменту часу. Тільки після цього грошові суми можна порівнювати між собою, додавати і віднімати. Опис зміни грошових сум в часі відбувається шляхом обчислення доходу від інвестування коштів, тобто шляхом нарахування відсотків на початкову суму. Теорія відсоткових ставок є основою для кількісного опису зміни вартості грошових сум в часі.

У першому розділі розглянуті проста, складна та неперервна схеми нарахування відсотків, поняття майбутньої вартості вкладеної чи запозиченої сьогодні суми, сучасної вартості суми, яку потрібно сплатити або одержати у певний момент часу у майбутньому, поняття потоку платежів та їх види.

1.1 Моделі зміни ціни грошей. Прості відсотки

Ціна грошей не залишається сталою величиною із плином часу. Щоб мати можливість завтра купити ті ж товари, що і сьогодні, необхідно збільшити свій капітал. Таку можливість пропонують численні фінансові організації, які пояснюють інвесторам їх вигоду за допомогою моделей (схем) нарощення їх капіталу. Одною з найпростіших схем нарощення капіталу є схема простих відсотків.

Існує два способи нарахування відсотків: *декурсивний* та *антисипативний*. За ***декурсивного*** способу відсотки нараховуються в кінці кожного періоду нарахування. Їх величина визначається початковим капіталом P (відсоткова ставка – відношення суми нарощеного за певний інтервал доходу до суми наявного капіталу на початок цього інтервалу). За ***антисипативного*** способу відсотки нараховуються на початку кожного періоду. Сума відсоткових грошей (доходу) визначається виходячи із нарощеної суми (відсоткова ставка – відношення суми доходу, яка виплачується за певний інтервал, до величини нарощеної суми).

Декурсивний спосіб.

Три прості правила нарахування ***простих відсотків (simple interest):***

1) початковий капітал P є постійним;

2) капітал збільшується пропорційно P і тривалості інвестування;

3) збільшення капіталу є однаковим за однакові проміжки часу.

При нарахуванні простих відсотків сума на рахунку після першого року збільшиться на величину rP, де r – річна ставка (*interest rate*) простих %, таким чином після першого року сума на рахунку становитиме: $V(1)=(1+r)P$. Після другого року сума $V(1)$ знову збільшиться на ту саму величину rP та перетвориться на $V(1)=(1+2r)P$.

Таким чином, згідно з правилом простих відсотків капітал інвестора у довільний момент часу t має вигляд:

$$V(t)=(1+tr)P. \tag{1.1.1}$$

Якщо нарахування відсотків здійснюється n раз на рік, тоді капітал інвестора у довільний момент часу t

$$V(t)=\left(1+\frac{t}{n}r\right)P, \tag{1.1.2}$$

де

r	річна номінальна ставка простих%
n	кількість періодів нарахування % за рік
$1+tr$	коефіцієнт росту (нарощення)

У випадку змінної з часом відсоткової ставки відсотки обчислюються окремо для кожного періоду, протягом якого відсоткова ставка стала. Нарощений за час $t=\sum_{i=1}^{k} t_i$ капітал обчислюється за формулою

$$V(t)=\left(1+\sum_{i=1}^{k} t_i r_i\right) P,$$

де k – кількість періодів змін відсоткової ставки,

t_i – тривалість періоду i,

r_i – відсоткова ставка у періоді i.

Ефективністю (коефіцієнтом повернення, англ. return) інвестиції у момент t, здійсненої у момент s, називається число

$$K(s,t)=\frac{V(t)-V(s)}{V(s)}.$$

У випадку простих відсотків ефективність дорівнює

$$K(s,t)=(t-s)r. \qquad (1.1.3)$$

Тоді відсоткову ставку можна визначити , якщо ефективність є відомою:

$$r=K(0,1).$$

Для схеми простих відсотків ефективність є адитивною, тобто

$$K(0,t)=K(0,s)+K(s,t),\ s<t.$$

Якщо відомий капітал на момент t, то величина початкового капіталу для схеми простих відсотків обчислюється за формулою:

$$P=V(0)=\frac{V(t)}{1+rt}$$

і називається ***дисконтованим значенням (discounted value)*** для $V(t)$, а ***коефіцієнт дисконтування (discount factor)*** має вигляд:

$$(1+rt)^{-1}.$$

Дисконт суми $V(t)$:

$$D(t) = V(t) - V(0).$$

Антисипативний спосіб. Відсотковий прибуток, який виплачується на початку кожного періоду нарахування відсотків (авансовий відсотковий прибуток), називають також ***дисконтом,*** а відповідну ставку називають ставкою дисконту, чи ***дисконтною (обліковою) ставкою*** d. Якщо за базу для нарахування відсотків взяти не P, а нарощену суму $V(t)$, то отримаємо означення ***річної дисконтної (облікової) ставки***:

$$d = \frac{V(1) - P}{V(1)}. \tag{1.1.4}$$

Із (1.1.4) випливає, що відсотки за рік (дисконт) складають $V(1) - P = dV(1)$. Тоді за t років відсотки (дисконт) будуть у t разів більшими і складатимуть $V(t) - P = tdV(t)$. Тобто базою для нарахування відсотків є нарощена сума $V(t)$. Капітал накопичений з t років за обліковою ставкою d дорівнює

$$V(t) = \frac{P}{1 - td},$$

d	річна дисконтна ставка простих %
t	кількість років нарахування за дисконтною ставкою %
$(1-td)^{-1}$	коефіцієнт росту (нарощення)

На практиці прості дисконтні ставки використовують при обліку (купівлі) векселів. ***Ве́ксель*** — це складене по встановленій законом формі письмове грошове боргове зобов'язання, яке видане одною стороною (векселедавцем) іншій стороні (векселетримачу). У векселі фіксується грошова сума (***номінал векселя)***, що підлягає поверненню власнику векселя, строк повернення (*дата погашення*).

Сучасна вартість величини $V(t)$ обчислюється за формулою:

$$P = V(t)(1 - td) \qquad (1.1.5)$$

де $(1 - td)$ – коефіцієнт дисконтування за облікової ставки d.

Формула (1.1.5) використовується при обліку векселів. Якщо період нарахування відсотків за дисконтною ставкою менше року, то вважають $t = \frac{n}{m}$, де n – кількість днів (місяців) від моменту обліку до дати погашення векселя (час, за який нараховується дисконт), $m = 365\ (12)$.

Приклади.

1. Фізичній особі видали позику під 10% річних а) на 5 місяців, б) на 3 місяці, в) на 45 днів (рік не високосний). Визначити відсоткову ставку за заданий період.

Розв'язання:

а) $T = \frac{5}{12}$; $r_{5/12} = 0{,}1 \times \frac{5}{12} = 0{,}0417$;

б) $T = \frac{3}{12} = 0{,}25$; $r_{0{,}25} = 0{,}1 \times 0{,}25 = 0{,}025$;

в) $T = \frac{45}{365}$; $r_{45/365} = 0{,}1 \times \frac{45}{365} = 0{,}0123$.

2. Вкладник розмістив суму розміром 1600 грн. в банк на один рік, однак йому прийшлося забрати гроші через сім місяців. Відсоткова ставка при достроковому знятті депозиту становить 9 % на рік. Знайти суму, яку отримає вкладник.

Розв'язання: Застосовуємо формулу (1.1.2) для обчислень

$$V(m) = \left(1 + \frac{m}{12} r\right) P,$$

де P – базова сума, яка є постійною,

r – відсоткова ставка за 1 рік,

m – період часу в місяцях.

$$V(7м.) = \left(1 + \frac{7}{12} 0,09\right) \cdot 1600.$$

За 7 місяців вкладник отримає 1684 грн.

3. Кредит у 8 000 грн. видано на пів року під просту дисконтну ставку 11% річних. Яку суму отримає позичальник.

Розв'язання. У формулі (1.1.5) покладемо $t = \frac{1}{2}$, оскільки кредит видано на пів року. Тоді сума отримана позичальником дорівнює

$$P = \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 0,11\right) 8000 = 7\,560 \text{ грн.}$$

4. Вексель на суму 20 тис. грн. з датою погашення 27.11.18 був реалізований банком 11.08.18 за простою дисконтною ставкою 12% річних. Знайти суму виплачену банком при реалізації (погашенні) векселя.

Розв'язання. Оскільки облік векселя відбувся раніше дати погашення, то використаємо формулу (1.1.5) для $t = \frac{n}{m}$, де $n = 21 + 30 + 31 + 26 = 108$ дн. – кількість днів від моменту обліку до дати погашення векселя, $m = 365$.

$$P = \left(1 - \frac{108}{365} \cdot 0,12\right) 20000 = 19289,9 \text{ грн.}$$

Отже, банк при обліку такого векселя виплатив $19289,9$ грн.

Аудиторні задачі

1. Фізичній особі видали позику під 20% річних а) на 4 місяці; б) на 3 місяці; в) на 35 днів (рік не високосний). Визначити відсоткову ставку за заданий період.

2. Компанією «Кредити за годину» було видано клієнту суму в борг у розмірі 2000 грн на 2 роки під 15% річних (відсоток простий). Визначити відсотки та суму, що потребує поверненню.

3. Визначити відсоткову ставку за період позики, коефіцієнт росту та суму накопиченої заборгованості, якщо було видано позику у розмірі 100 тис. грн., термін заборгованості – 2 місяці, номінальна відсоткова ставка – 10 %.

4. Суму у 100 грн поклали під простий відсоток 10% річних на 2,5 роки. Потім накопичену суму поклали під простий відсоток 16% річних на наступні m місяців. Наприкінці терміну отримали накопичену суму 140 грн. Чому дорівнює m?

5. При ставці у 25% річних 15.01.15 на банківський рахунок було покладено суму 10000 грн. З 01.03.15 відсоткова ставка за внеском становила 30% річних. 10.03.15 рахунок було закрито, до отриманої суми було додано суму 5000 грн. і відкрито новий рахунок у тому ж банку. З 15.05.15 відсоткова ставка за внеском становила 20% річних. 25.05.15 рахунок було закрито. Знайти суму, яку отримав вкладник, використовуючи правило простих відсотків.

6. Угода передбачає таку схему нарахування простих відсотків: за перший рік – 60%, в кожному наступному півріччі (семестрі) ставка підвищується на 10%. Потрібно визначити коефіцієнт нарощення за 2,5 роки.

7. На депозит було покладено 9000 грн. терміном на 2 місяці (61 день). Відомо, що в кінці терміну капітал інвестора перетворився на 9020 грн. Знайти відсоткову ставку і ефективність цієї інвестиції.

8. Визначити суму внеску, який потрібно покласти на депозит до банку терміном на 2 роки під 10 % річних, щоб в кінці терміну отримати 8400 грн.

9. Позичальник отримав кредит на 6 місяців під 80% річних із умовою повернути 6 000 000 грн. Яку суму отримав позичальник у момент складання угоди та який тут дисконт?

10. Скільки часу має пройти, щоб інвестиція в банківський рахунок 800 у.о. при відсотковій ставці 9% перетворилась на 830 у.о.?

11. Видано вексель на суму 2 000 грн. з датою погашення 14.01.14. Власник такого векселя реалізував його у банку 17.09.13. за дисконтною ставкою 20%. Знайти суму, яка отримана при реалізації векселя, та дисконт такої операції.

Задачі для самостійної роботи

1. Виданий кредит у сумі 1 млн. грн. з 15.01.99 по 15.03.99 під 120% річних. Яку суму необхідно повернути до банку?

2. Знайти величину суми простих відсотків по внеску 120000 грн, терміном 91 день і відсотковою ставкою 12% річних, (часова база 365 днів на рік).

3. На скільки днів можна дати у борг 100 000 грн, виходячи з 8% річних, якщо сума повернення буде складати 107 500 грн?

4. При відкритті рахунку зі ставкою 35% річних 10.01.17 на рахунок поклали суму 10 000 грн. З 01.03.17 відсоткова ставка по внеску становить 30% річних. 10.03.17 з рахунку знято суму 5 000 грн. З 15.05.17 відсоткова ставка становить 20% річних, 20.05.17 рахунок закрито. Знайти отриману суму, використовуючи простий метод нарахування відсотків.

5. Кредит у розмірі 220 000 грн було видано строком на 4 роки:

Відсоткові ставки

1 рік − 12%,

2 рік − 16%,

3 рік − 19%,

4 рік − 21%.

Знайти накопичену суму до погашення заборгованості, використовуючи метод простих відсотків.

6. Визначити відсоткову ставку за період позики, коефіцієнт росту та суму накопичуваної заборгованості, якщо було видано позику у розмірі 7 000 грн., термін заборгованості – 2 роки, номінальна відсоткова ставка – 10 %.

7. Визначити суму внеску, який потрібно покласти на депозит до банку терміном на 2 місяці під 10 % річних, щоб в кінці терміну отримати 101 667 грн.

8. Банк нараховує 50 грн. за схемою простих відсотків за користування 3 000 грн. протягом 60 днів. Яка відсоткова ставка такої угоди? У році 365 днів.

9. Вексель реалізовано банком за пів року до дати погашення за простою дисконтною ставкою 14% річних. Банк виплатив суму 15 000 грн. Знайти суму, на яку було видано вексель.

10. Вексель видано на 3 млн. грн. із строком погашення через 3 місяці. Банк реалізував цей вексель за дисконтною ставкою 20 % річних. Скільки отримає власник векселя 1) на початку строку, 2) через 2 місяці?

11. Через скільки років сума 50 000 грн збільшиться вдвічі при простій річній мвідсотковій ставці 8%?

Відповіді

Аудиторні задачі: ***2.*** *600 грн.* ***3.*** $k = 1{,}01667; 101\ 667$ *грн.* ***4.*** *9 місяців.* ***5.*** *16300,90 грн.* ***6.*** *2,8* ***7.*** *0,22%* ***8.*** *7000 грн.* ***9.*** 1 714 285.7 *грн.* ***10.*** *152 дні.* ***11.*** *1 866,3 грн., D=133,7 грн.*

Задачі для самостійної роботи: ***1.*** *1 млн. 193 тис. 972 грн.* ***2.*** *3590,14 грн.* ***3.*** *342 дні.* ***4.*** *5869, 89 грн.* ***5.*** *369600 грн.* ***6.*** *1400 грн.; 1,2; 8400 грн.* ***7.*** *0,9836; 100 000 грн.* ***8.*** *10,14%.* ***9.*** *16 129,03 грн.* ***10.*** *1) 2,85 млн. грн., 2) 2,95млн. грн.* ***11.*** *12 років та 6 місяців*

1.2 Моделі зміни ціни грошей.
Складні відсотки: періодичне нарахування

У схемі нарахування *складних відсотків* сума нарахованих в кожному періоді процентів додається до капіталу попереднього періоду, а нарахування відсотків у наступному періоді здійснюється на вже нарощену величину початкового капіталу. Як і у випадку простих відсотків існують два способи нарахування складних відсотків: декурсивний та антисипативний.

Декурсивний спосіб.

Три прості правила нарахування ***складних відсотків (periodic compounding)***:

1) відсотки нараховуються m раз на рік із відсотковою ставкою r;

2) початковий капітал P збільшується за кожний період на величину відсотків;

3) відсотки за кожний період складають $\frac{r}{m}P$.

При нарахуванні складних відсотків щороку, капітал інвестора у довільний момент часу t складає

$$V(t) = (1+r)^t P \tag{1.2.1}$$

де r – річна ставка складних %,

t – кількість років, які відбувається нарахування %.

Якщо нарахування відсотків здійснюється m раз на рік, тоді капітал інвестора у довільний момент часу t

$$V(t) = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{tm} P \tag{1.2.2}$$

де

j – річна номінальна ставка складних %,
t – кількість років, які відбувається нарахування %,
m – кількість періодів нарахування % за рік.

Якщо $m=4 \Rightarrow$ нарахування відбувається щоквартально, $m=12 \Rightarrow$ нарахування відбувається щомісяця, $m=365 \Rightarrow$ нарахування відбувається щодня.

$(1+r)^t$ або $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{tm}$ – ***коефіцієнти росту або нарощення (growth factor)*** складних відсотків.

Ефективна річна ставка r_{ef} ***(effective rate)*** вимірює реальний прибуток в цілому за рік при нарахуванні % за номінальною ставкою j кілька разів на рік

$$r_{ef}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1. \tag{1.2.3}$$

Якщо відомий капітал на момент t, то величина початкового капіталу обчислюється за формулами

$$P=V(0)=V(t)\left(1+r\right)^{-t}$$

або

$$V(0)=V(t)\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-tm}$$

і називається ***дисконтованим значенням (discounted value)*** для $V(t)$.

$\left(1+r\right)^{-t}$ та $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-tm}$ - ***коефіцієнти дисконтування***.

Ефективність (коефіцієнт повернення) інвестиції

$$K(s,t)=\frac{V(t)-V(s)}{V(s)}$$

не адитивна, на відміну від простих відсотків.

Антисипативний спосіб.

У першому періоді нарощена сума за ***дисконтною (обліковою) ставкою*** d складних відсотків визначається за формулою

$$V(t)=P\frac{1}{1-d},$$

у другому:

$$V(t) = P\frac{1}{1-d}\frac{1}{1-d} = P\frac{1}{(1-d)^2}.$$

Тоді за t років нарощений капітал дорівнює

$$V(t) = P\frac{1}{(1-d)^t}. \qquad (1.2.4)$$

При нарахуванні складних антисипативних відсотків m разів на рік нарощений капітал за t років (*номінал векселя*) дорівнює

$$V(t) = P\frac{1}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mt}}, \qquad (1.2.5)$$

f – номінальна дисконтна (облікова) ставка відсотків за рік,

m – кількість періодів нарахування відсотків за рік.

$\frac{1}{(1-d)^t}$ та $\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-mt}$ – ***коефіцієнти нарощення*** за складних антисипативних відсотків.

Приклади.

1. У яку суму перетвориться борг величини 10 тис. грн. через 5 років, якщо відсотки нараховуються щороку за складною схемою і дорівнюють 5,5%? Чому дорівнюють відсотки (величина приросту грошової суми)?

Розв'язання. Сума боргу через 5 років

$$V(5) = (1+0,055)^5 \cdot 10000 \approx 13070 \text{ } грн.$$

Нараховані відсотки від 10 тис.грн.

$$V(5) - P = 3070 \text{ } грн.$$

2. Якою буде сума боргу через 25 місяців, якщо у борг взяли 500 тис. грн., складні відсотки нараховуються щоквартально із номінальною ставкою $j = 20\%$?

Розв'язання. У нашому випадку $m = 4,$ $t = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$ років. Тому значення $mt = 8\frac{1}{3}$ є кількістю періодів нарахування за t років. Борг через 25 місяців

$$V\left(2\frac{1}{12}\right) = \left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^{8\frac{1}{3}} \cdot 500000 \approx 750840 \text{ грн.}$$

У випадку, коли кількість періодів нарахування % не є цілим числом, також застосовують ***змішану схему***: за ціле число років нараховують складні %, за дробову частину – прості: $mt = a + b,$

$$V(t) = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^a \left(1 + \frac{j}{m} b\right) P.$$

Тоді за змішаною схемою нарахування борг становить: $mt = 8\frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3}$ та

$$V(t) = \left(1 + \frac{0,2}{4}\right)^8 \left(1 + \frac{0,2}{4}\frac{1}{3}\right) \cdot 500000 = 751039,85 \text{ грн.}$$

Зауважимо, що змішаний метод забезпечує більше нарощення початкового капіталу.

3. Знайти ефективну відсоткову ставку, якщо складні відсотки нараховуються щомісяця з номінальною ставкою $j = 15\%$.

Розв'язання. За формулою (1.2.3) ефективна відсоткова ставка складає

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12} - 1 = 16,08\%.$$

Розв'язання. За формулою (1.2.1) нарощена за 3 місяці сума боргу дорівнює

4. Громадянин А взяв у борг у громадянина Б 7 800 грн і видав йому вексель, за яким зобов'язався через 3 місяці виплатити 8 000 грн. Знайти річну ставку складних відсотків та річну дисконтну ставку складних відсотків для такої фінансової домовленості.

$$V\left(\frac{3}{12}\right) = V(0)(1+r)^{\frac{3}{12}} \Leftrightarrow 8000 = 7800(1+r)^{\frac{1}{4}},$$

тобто річна ставка складних відсотків $r = \left(\frac{8000}{7800}\right)^4 - 1 = 0{,}1066$ або $10{,}66\%$.

За формулою (1.2.4) нарощена за 3 місяці сума боргу дорівнює

$$V\left(\frac{3}{12}\right) = \frac{V(0)}{(1-d)^{\frac{3}{12}}},$$

тоді

$$8000 = \frac{7800}{(1-d)^{\frac{1}{4}}}$$

тобто річна дисконтна ставка складних відсотків $d = 1 - \left(\frac{7800}{8000}\right)^4 = 0{,}0963$ або $d = 9{,}63\%$.

Аудиторні задачі

1. На початкову суму протягом 5 років нараховуються складні відсотки по ставці 12%. У скільки разів зросте нарощена сума, якщо відсотки будуть нараховуватись щомісяця?

2. Скільки часу має пройти, щоб капітал подвоївся, якщо відсотки нараховуються щоденно і (номінальна) ставка $j = 6\%$.

3. Знайти r, якщо капітал подвоюється після 10 років, а відсотки нараховуються щорічно.

4. Визначити і порівняти капітал після 10 років інвестування 1000 грн. під 20% річних, якщо складні % нараховуються: а) 1 раз на рік; б) 2 рази на рік; в) щокварталу; г) щомісяця; д) щодня. Зробити висновки.

5. Яку суму потрібно інвестувати під 12% , що нараховуються щороку, щоб отримати 1000 у.о. через 2 роки?

6. На початковий капітал 580 у.о. 2,5 роки нараховують складні відсотки зі ставкою 8,75%. На скільки більшою буде нарощена сума, обчислена за змішаним методом, ніж нарощена сума за загальним методом (кількість днів у році дорівнює 360)?

7. Кредит 120 000 грн. видано на 5 років. Відсоткова ставка за перший рік – 12%, за 2 наступні – 15%, за останні 2 роки – 16%. Знайти нарощену суму складних відсотків.

8. Який варіант більш вигідний: вкласти 20 000 грн. на 1 місяць під 12% річних або на 6 місяців під 12.2%?

9. Сума 5 млн. грн. виплачується через 5 років. Яка її сучасна вартість за умови, що застосовуються складні відсотки за ставкою 10% річних?

10. Знайти початковий капітал, необхідний для того, щоб мати $100 000 після 100 років, якщо відсоткова ставка 5%, а нарахування відбуваються а) щоденно; б) щорічно?

11. Знайти ефективність депозиту за рік, якщо складні відсотки нараховуються щомісяця з $r = 10\%$.

12. Суму в 100 грн інвестували на рік на умовах номінальної облікової (дисконтної) ставки 5,5 % річних, що нараховується щоквартально, а потім на рік на умовах номінальної відсоткової ставки 5,5 % (теж нараховується щоквартально). Яка сума накопичиться наприкінці другого року?

13. Боргове зобов’язання на суму 5 млн. грн., строк оплати якого наступає через 5 років, продано з дисконтом із складною обліковою ставкою 15% річних. Знайти а) величину отриманої за борг суми та величину дисконта; б) те ж саме за простої облікової ставки; в) те ж саме при поквартальному нарахуванні.

14. Встановіть, що більше: відсоткова ставка r або ефективність $K(0,1)$, якщо нарахування відсотків здійснюється більше, ніж один раз на рік: $m > 1$.

Задачі для самостійної роботи

1. Перевірте наступну інформацію інвестиційної компанії: вона стверджує, що її капітал подвоюється за 7,5 років при 9,25 % (номінальних) і піврічній виплаті відсотків.

2. Визначити та порівняти капітал після двох років інвестування 100 у.о. під 10% річних, якщо складні відсотки нараховуються а) раз на рік; б) раз на півроку.

3. Кредит сумою 750 000 грн. видано на 3 роки під 11% річних. Знайти нарощену суму за схемою складних відсотків.

4. Який з депозитів 1000 у.о. через рік збільшить капітал більше а) під 15%, що нараховується кожний день або б) під 15,5%, що нараховується кожні пів року?

5. Визначити час збільшення початкового капіталу у 4 рази, якщо нарахування відсотків відбувається щомісяця при номінальній ставці 36% річних. За необхідності виконати корекцію нарощеного капіталу так, щоб час був із цілою кількістю місяців.

6. Вкладник поклав на рахунок 10 тис. грн.. Банк гарантує, що протягом трьох наступних років річна відсоткова ставка дорівнюватиме $i_1 = 7\%$. Через 3 роки банк встановить річну ставку i_2 на наступні 3 роки. Відомо, що i_2 не вийде за межі проміжку $[6\%;8\%]$. Що можна сказати про суму, нарощену за 6 років?

7. Знайти сучасну вартість одноразової виплати сумою \$72000 через 6 років, якщо вона знята з депозиту під 14% річних, які нараховуються 2 рази на рік. Яка ефективність такого депозиту за а) перші 3 роки; б) за наступні 3 роки? Перевірте властивість адитивності ефективності.

8. Кредит сумою \$2500 видано на 8 років. Складна ставка річних % змінювалась від періода до періода: протягом перших 3-х років діяла ставка

7,5%, у наступні 3 роки – 8%, в останньому періоді − 8,2%. Яку суму треба повернути в кінці 8-го року?

9. Визначити ефективну відсоткову ставку, якщо номінальна відсоткова ставка дорівнює 10 % і складні відсотки нараховуються:

а) щопівроку;

б) щоквартально;

в) щомісяця.

10. Знайти строк платежу за векселем на суму 1000 у.о., якщо при його реалізації по номінальній дисконтній ставці 48% річних (складних відсотків) з щомісячним нарахуванням відсотків власник отримав позику 900 у.о.

Відповіді

Аудиторні задачі: ***1****. у 1,03 рази.* **2.** *≈11,5534 роки.* **3.** *≈7,18%.* **4.** *1) 6191,7 грн.; 2) 6727,5 грн.; 3) 7040 грн.; 4) 7268,3 грн.; 5) 7385 грн. Висновок: чим частіше нараховуються проценти, тим швидше йде процес нарощення.* **5.** *≈797,19$.* **6.** *0,63$.* **7.** $239172,33$ *грн.* **8.** *Перший варіант більш вигідний.* **9.** $3104606,62$ *грн.* **10.** *1) 674,03$. 2) 760,45$.* **11.** *10.47%.* **12.** *111,63 грн.* **13.** *1)* $2,218527$ *млн.грн.*, $D = 2,781473$ *млн.грн.; 2)* $1,25$ *млн.грн.; 3)* $2,32801$ *млн.грн..* **14.** $K(0,1) > \mathrm{r}$.

Задачі для самостійної роботи*:* **1.** *збільшиться у 1,97 рази.* **2.** *1) 121$; 2) 121,55$.* **3.** *1025723,25 грн.* **4.** *1) 1161,80 у.о.; 2) 1161,01 у.о..* **5.** *3,908 роки; S = P · 4,0119.* **6.** $V(6) \in [14\,590,46; 15\,432,01]$. **7.** *V(0)=31 986,86$; а) K(0,3)=50,07%; б) K(3,6)=50,07%. Оскільки K(0,6)=125,22%, то адитивності немає, бо K(0,6) ≠ K(3,6)+ K(3,6)=100,14%.*
8. *4580,27$.* **9.** *а) 10,25%; б) 10,38%; в) 10,47%.* **10.** *0,215 року або 78,5 днів.*

1.3 Неперервне нарахування складних відсотків

У фінансово-кредитних операціях на практиці переважно застосовують дискретні відсотки, тобто відсотки, що нараховуються за фіксований проміжок часу. У випадку аналізу складних фінансових проблем, наприклад, при обґрунтуванні та виборі інвестиційних рішень, у фінансовому проектуванні, виникає необхідність у неперервному нарощенні відсотків. За допомогою неперервного нарахування вдається врахувати складні закономірності процесу нарощення, наприклад такі як змінна відсоткова ставка.

За неперервного нарощення відсотків застосовують спеціальний вид відсоткової ставки – ***силу росту***. Сила росту характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона може бути сталою або змінюватись з часом.

Стала сила росту. При періодичному нарахуванні відсотків m разів на рік за річною номінальною ставкою j нарощена сума у довільний момент часу t складає

$$V(t) = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{t\cdot m}.$$

Якщо частота нарахування відсотків m прямує до нескінченності, то говорять про неперервне нарахування відсотків. Тоді

$$V(t) = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{t\cdot m} = P\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}\cdot jt} = Pe^{jt}.$$

Для того, щоб відрізняти неперервну ставку від дискретної, позначимо ***силу росту*** через δ. Тоді капітал інвестора у момент t дорівнює

$$V(t) = Pe^{\delta t}. \tag{1.3.1}$$

Множник $e^{\delta t}$ називається ***коефіцієнтом росту*** неперервних складних відсотків.

Із рівності коефіцієнтів нарощення отримуємо зв'язок між дискретною та неперервною ставками складних %

$$(1+r)^t = e^{t\delta} \Rightarrow$$

$$\delta = \ln(1+r) \quad \text{або} \quad r = e^{\delta} - 1.$$

Можливе порівняння формул складних відсотків. Два методи, основані на формулі складних відсотків, називаються ***еквівалентними,*** якщо коефіцієнти росту за однаковий період рівні між собою. Якщо один із коефіцієнтів переважає інший, то відповідний метод ***є більш переважаючим***.

Ефективною відсотковою ставкою методу А (із відсотковою ставкою $r\%$) називається число $r_{ef}\%$, за якого метод А еквівалентний методу із відсотковою ставкою $r\%$ із нарахуванням відсотків один раз на рік.

Наприклад, ефективна ставка для неперервних складних % обчислюється за формулою

$$r_{ef} = e^{\delta} - 1.$$

Сучасна вартість капіталу $V(t)$ при неперервному нарахуванні відсотків із силою росту δ дорівнює

$$P = V(0) = V(t)e^{-\delta t}. \quad (1.3.2)$$

Множник $e^{-\delta t}$ називається ***коефіцієнтом дисконтування.***

У випадку заданих моментів часу s та $t,\ s < t$, дисконтований капітал у момент s дорівнює

$$V(s) = V(t)e^{-\delta(t-s)}.$$

Ефективність (коефіцієнт повернення) за неперервних відсотків

$$K(s,t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)} = \frac{e^{\delta(t-s)}V(s) - V(s)}{V(s)} = e^{\delta(t-s)} - 1,\ s < t\ .$$

Не складно перевірити, що він не є адитивним, так само як і у випадку періодичних складних відсотків. Розглянемо ***логарифмічний коефіцієнт повернення***

$$k(s,t) = \ln\frac{V(t)}{V(s)} \quad (1.3.3)$$

та покажемо, що він адитивний. Нехай $s < t < u$. Тоді

$$k(s,t) + k(t,u) = \ln\frac{V(t)}{V(s)} + \ln\frac{V(u)}{V(t)} = \ln\frac{V(t)}{V(s)}\frac{V(u)}{V(t)} = \ln\frac{V(u)}{V(s)} = k(s,u).$$

Знайдемо за означенням логарифмічний коефіцієнт повернення для неперервного нарахування відсотків

$$k(s,t) = \ln\frac{V(t)}{V(s)} = \ln\frac{Pe^{\delta t}}{Pe^{\delta s}} = \ln e^{\delta(t-s)} = \delta(t-s).$$

Змінна сила росту. Нехай сила росту змінюється із часом, тобто є неперервною функцією часу: $\delta = \delta(t).$ Нарощений за n років капітал дорівнює

$$V(n) = Pe^{\int_0^n \delta(t)dt}. \quad (1.3.4)$$

Функція, що задає силу росту може бути довільною неперервною функцією. Розглянемо випадок лінійної $\delta(t)$, тобто

$$\delta(t) = \delta + at,$$

де δ – початкове значення сили росту, a – приріст сили росту за одиницю часу. Коефіцієнт нарощення в цьому випадку рівний

$$e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}. \qquad (1.3.5)$$

Приклади.

1. На суму $2\,000\$$ протягом 5 років відсотки нараховуються неперервно із силою росту $\delta = 10\%$. Знайти нарощений капітал, коефіцієнт росту та відповідну ставку складних відсотків.

Розв'язання. Нарощений за 5 років капітал складає

$$V(5) = e^{5\cdot 0,1} \cdot 2\,000 = 3\;297\$.$$

Неперервне нарощення за ставкою 10% рівнозначне нарощенню за такий самий час дискретних складних відсотків за річною (ефективною) ставкою

$$r = e^{\delta} - 1 = 0{,}105 \text{ або } 10{,}5\%.$$

Коефіцієнт росту неперервних відсотків $e^{t\delta} = e^{5\cdot 0,1} = 1{,}65$.

2. Знайти сучасну вартість 1 млн. грн., який буде виплачено через 20 років при неперервному нарахуванні відсотків із силою росту 6%. Якою буде ефективна ставка складних відсотків?

Розв'язання. За формулою обчислення сучасної вартості капіталу (дисконтування)

$$V(0) = e^{-20\cdot 0,06} \cdot 1000\,000\,000 = 301\,194 \text{ грн.}$$

Ефективна ставка складних відсотків складає

$$r_{ef} = e^{0,06} - 1 = 0,0618 \text{ або } 6,18\%.$$

3. Знайти метод, оснований на формулі складних відсотків з неперервним часом, який еквівалентний методу, що оснований на 12%, які нараховуються щомісяця.

Розв'язання. Прирівнюємо відповідні коефіцієнти нарощення за 1 рік

$$e^{\delta} = (1 + 0,12/12)^{12} \Rightarrow \delta = 12 \ln 1,01 = 0,1194 = 11,94\%.$$

Аудиторні задачі

1. На початковий капітал 300 грн. нараховують складні 6% річних протягом 4 років. Знайти нарощену за 4 роки суму, якщо нарахування відсотків здійснюється неперервно.

2. Відомо, що майбутня вартість 950 грн. за неперервного нарахування відсотків складатиме 1 000 грн. через пів року. Знайти силу росту.

3. У 1626 році Пітер Міно, губернатор колонії Нова Голландія, купив острів Манхеттен у індіанців, запропонувавши їм натомість буси, одежу та інші дрібнички загальною вартістю $24. Яка цінність цієї суми у 2000 році при 5% річних, якщо застосовувати формулу складних відсотків а) для дискретного часу з нарахуванням відсотків 1 раз на рік; б) для неперервного часу?

4. Людина поклала гроші в банк з номінальною відсотковою ставкою 10 % на рік. Через який час гроші подвояться, якщо відсотки нараховуються неперервно?

5. Нехай відсоткова ставка банку дорівнює 6 % і відсотки нараховуються неперервно протягом року. Обчислити ефективну відсоткову ставку.

6. Для відсоткової ставки 7% річних, що сплачується щомісяця, обчисліть:

а) еквівалентну річну ставку відсотка, що сплачується раз у півроку;

б) еквівалентну річну дисконтну ставку, що сплачується щомісяця.

7. Нехай на депозит поклали 100 000 грн. Якою буде різниця між нарощеними сумами через рік за ставки 10% річних, що нараховуються щомісяця, та за сили

росту 10% при неперервному нарахуванні? Як часто мають періодично нараховуватись відсотки, щоб ця різниця була меншою за 10 грн.?

8. За скільки часу можна заробити 1 грн., якщо на депозиті розміщено 1 млн. грн. за умови, що відсотки нараховуються неперервно із силою росту 10%?

9. Фірма BMW планує покласти частину прибутку від продажу нової моделі спортивного автомобіля на депозит у банк. Яку суму необхідно покласти до банку, щоб через 1,5 року при нарахуванні неперервних відсотків можна було б отримати 250 000 $, якщо сила росту становить 22%?

10. Нехай сила росту змінюється лінійно: 1) зростає із швидкістю 2% на рік; 2) спадає із швидкістю 1% на рік. Початкове значення сили росту дорівнює 7%. Знайти коефіцієнт нарощення за 6 років для кожного випадку змінної сили росту.

11. Знайти ефективність та логарифмічну ефективність інвестиції для задачі №1.

12. У якому випадку звичайна та логарифмічна ефективності будуть приймати (майже) однакові значення?

Задачі для самостійної роботи

1. Якою має бути сила росту при неперервному нарахуванні відсотків, щоб за 2 роки початковий капітал збільшився у 3 рази?

2. Знайти сучасну вартість платежу 200 000 грн., якщо момент виплати очікується через 10 років. Відсотки нараховуються неперервно із силою росту 8%.

3. Знайти час збільшення початкового капіталу у два рази, якщо нарахування відсотків неперервне із силою росту 14%. Скоригуйте нарощений капітал так, щоб строк операції був реальним, наприклад, з найближчою кількістю 1) днів (із розрахунку 365 днів у році); 2) місяців; 3) років. Знайдіть величину нарощеного капіталу.

4. Облікова (дисконтна) ставка за рік сплачується щоквартально і становить 8%.

Знайдіть:

а) еквівалентну ставку відсотка, що сплачується щопівроку;

б) еквівалентну дисконтну ставку за рік, що сплачується щомісяця.

5. На початковий капітал 500 грн. нараховуються складні відсотки − 8% річних протягом 4 років. Визначити нарощену суму, якщо відсотки нараховуються неперервно.

6. Визначити ефективну відсоткову ставку, якщо номінальна ставка дорівнює 12 % і складні відсотки нараховуються:

1) щороку;

2) щопівроку;

3) щомісяця;

4) неперервно.

7. Нехай сила росту змінюється лінійно за початкової сили росту 10%. Протягом перших 5 років сила росту спадала на 1% щороку, наступні 5 років відбувалось зростання сили росту на 1% за рік. Знайти коефіцієнт нарощення за 10 років. Порівняти із коефіцієнтом нарощення за 10 років за сталої початкової сили росту у 10%.

8. Припустимо, що сила росту змінюється як показникова функція, тобто $\delta(t) = \delta a^t$, де δ – початкове значення сили росту, a – сталий темп росту. Знайти коефіцієнт нарощення за n років.

9. Розв’язати задачу №8 при початковому рівні сили росту 5%, зростанні сили росту на 20% щороку ($a = 1,2$) та періоді нарощення 7 років.

10. З метою вибору більш вигідного способу вкладання грошей на 5 років компанія «Нові ІТ-технології» розглядає такі варіанти:

1) вкласти капітал під складні 20% (річних) з нарахуванням відсотків щомісяця;

2) вкласти капітал під неперервні 19% (сила росту).

Який із варіантів більш вигідний для компанії? Як часто потрібно нараховувати складні відсотки, щоб різниці між 1) та 2) не було?

11. Нехай логарифмічна ефективність інвестиції на 2 місяці за умов неперервного нарахування відсотків складає 3%. Знайдіть силу росту.

Відповіді

Аудиторні задачі: ***1.*** *387,36 грн.* ***2.*** *10,28%* ***3.*** *а)* $V(374) = 2\,018\,408\,628$ \$, *б)* $V(374) = 3\,173\,350\,575$ \$. ***4.*** $t = 6{,}93 \approx 7$ *років.* ***5.*** $r_{ef} = 0{,}062$. ***6.*** *а)* $j = 0{,}07103$, *б)* $f = 0{,}06959$. ***7.*** *45,8 грн., 56 разів.* ***8.*** *315,36 секунд.* ***9.*** *179 730,9 \$.* ***10.*** *1) 2,18; 2) 1,27.* ***11.*** *26, 11%, 23,2%.* ***12.*** *При* $\delta \to 0$ *та* $t - s \to 0$.

Задачі для самостійної роботи: ***1.*** *55%.* ***2.*** *89 865,8 грн.* ***3.*** *4,951 років, 1) 1,9904 V(0); 2)2,0138 V(0).* ***4.*** *а) j=8,246%; б) f=8,0539%.* ***5.*** *V(4)=680,25 грн.* ***6.*** *1) 12%; 2) 12,38%; 3) 12,68%; 4) 12,75%.* ***7.*** *2,117; 2,718.* ***8.*** $\frac{\delta}{\ln a}(a^n - 1)$. ***9.*** *2,03.* ***10.*** *Варіант 1) більш вигідний.* ≈ 2 *рази на рік.* ***11.*** *0,18.*

1.4 Потоки платежів: ануїтет, його характеристики

Одним з основних інструментів фінансового аналізу є оцінка ***грошового потоку (cash flow)***, який генерується протягом деякого набору часових інтервалів за рахунок реалізації певного проекту чи функціонування того чи іншого виду активу. Зазвичай вважають, що надходження, які генеруються в межах одного часового інтервалу, мають місце на початку або у кінці інтервалу, тобто вони не розподілені у середині.

Ануїтет − це частинний випадок грошового потоку, а саме одно направлений грошовий потік з рівними часовими інтервалами. Довільна грошова сума такого потоку називається елементом ануїтету, а величина постійного часового інтервалу між двома його послідовними елементами називається періодами ануїтету.

Ануїтет (фінансова рента) називається постійним, якщо усі грошові надходження є рівними між собою. Якщо виплати здійснюються на початку кожного періоду часу, то ануїтет називається ***пренумерандо (annuity due),*** а якщо наприкінці кожного періоду – ***постнумерандо (ordinary annuity)***.

Ануїтет називається ***постійним (fixed annuity),*** якщо усі грошові надходження є рівними між собою.

Теперішня вартість (ціна) ренти *пренумерандо* тривалістю n років з щорічною виплатою (внеском) у розмірі C із річною ставкою складних відсотків r складає

$$P_{pre} = C + \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+r)^{n-1}} = C \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r/(1+r)} = C \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}}. \tag{1.4.1}$$

Теперішня вартість (ціна) ренти *постнумерандо* тривалістю n років з щорічною виплатою (внеском) у розмірі C із річною ставкою складних відсотків r складає

$$P_{post} = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+r)^{n}} = C \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = C \cdot a_{\overline{n|}}. \tag{1.4.2}$$

Величини $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ та $a_{\overline{n|}}$ називають коефіцієнтами ануїтету пре- та постнумерандо, відповідно.

Послідовність виплат фіксованої величини, що здійснюється через однакові проміжки часу, триває «нескінченно», називається ***перпетуум (довічна рента).*** Якщо у формулі (1.4.2) $n \to \infty$, то отримаємо $\frac{C}{r}$ – ціну перпетуума постнумерандо.

У деяких випадках надходження (або виплати) відбуваються дуже часто, тому не можна їх прив'язувати до певного моменту часу. Такий грошовий потік називається *неперервним.*

Якщо кількість періодів n обмежена, грошовий потік називається *строковим*, якщо необмежена ($n \to \infty$) – *довічним*.

Майбутня вартість грошового потоку *постнумерандо* знаходиться за формулою

$$PF_{post} = C(1+r)^n + C(1+r)^{n-1} + \ldots + C(1+r) + C = C \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \qquad (1.4.3)$$

Майбутня вартість ренти *пренумерандо* знаходиться за формулою

$$PF_{pre} = C(1+r)^n + C(1+r)^{n-1} + \ldots + C(1+r) = C \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^{-1}}. \qquad (1.4.4)$$

Ануїтет називається змінним, якщо усі грошові надходження є різними за величиною. Теперішня вартість змінного ануїтету постнумерандо обчислюється за формулою

$$P_{post} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k}.$$

Формула для обчислення теперішньої вартості пренумерандо має вигляд

$$P_{pre} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^{k-1}}.$$

Майбутні вартості постнумерандо та пренумерандо відповідно дорівнюють

$$PF_{post} = \sum_{k=1}^{n} C_k (1+\mathrm{r})^{n-k}, \quad PF_{pre} = \sum_{k=1}^{n} C_k (1+\mathrm{r})^{n-k+1}.$$

Якщо тіло кредиту і проценти по ньому повертаються кредитору рівними частинами протягом n років, то така схема кредитування називається ***кредитом з амортизацією.*** Для кредитної організації така схема еквівалентна ануїтету постнумерандо на n років, якщо виплати за кредитом здійснюються в кінці кожного року. Тоді величина кредиту P та щорічний платіж C пов’язані формулою (1.4.2).

Приклади.

1. Клієнт заключає з банком договір про виплату йому протягом 5 років щорічного платежу в розмірі 10 тис. грн. на початку кожного року. Який внесок йому потрібно зробити на початку першого року, щоб забезпечити такий ануїтет, якщо річна відсоткова ставка 20%?

Розв'язання. Оскільки виплата $C = 10$ *тис. грн.* здійснюється на початку кожного року, то маємо ануїтет пренумерандо. Його коефіцієнт за 5 років рівний

$$\ddot{a}_{\overline{5}|} = \frac{1-(1+0,2)^{-5}}{0,2/(1+0,2)} = 3,589.$$

Тоді ціна ануїтету або його сучасна вартість складає

$$\mathrm{P}_{pre} = \ddot{a}_{\overline{5}|} \cdot C = 3,589 \cdot 10 = 35,89 \text{ тис.грн.}$$

2. Клієнт у кінці кожного року робить внесок у розмірі 3 тис. грн до банку, який виплачує складні відсотки за відсотковою ставкою 25% річних. Визначте суму, яка буде на рахунку клієнта через 7 років.

Розв'язання. За умовами задачі, варіант розміщення грошей є постійним ануїтетом постнумерандо з щорічним внеском $C = 3$ *тис. грн.* Зобразимо схематично цю ситуацію (Рис. 4.1).

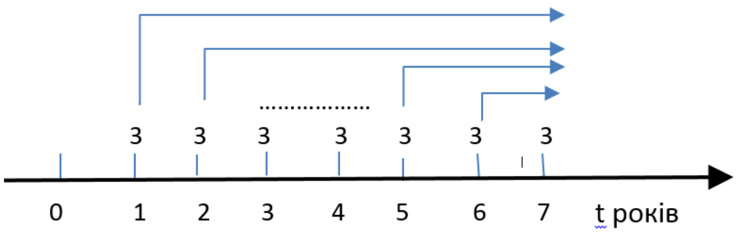


Рис. 1.4.1.

Для визначення суми на рахунку через 7 років (майбутньої вартості ануїтету) скористаємось формулою

$$PF_{post} = 3(1+0,25)^6 + 3(1+0,25)^5 + \ldots + 3(1+0,25) + 3 =$$
$$= 3 \cdot \frac{(1+0,25)^7 - 1}{0,25} = 45,22 \text{ тис. грн.}$$

3. Вам пропонують здати в оренду приміщення на шість років та пропонують обрати один з двох варіантів угоди: <u>варіант І.</u> *20 тис грн. в кінці кожного року,* <u>варіант ІІ.</u> *240 тис грн у кінці шестирічного періоду.*

Який варіант є більш вигідним, якщо банк пропонує 30% річних за внесками?

Розв'язання. Варіант І є моделлю ануїтету постнумерандо з 6-ма періодами та $C = 20$ *тис. грн.*

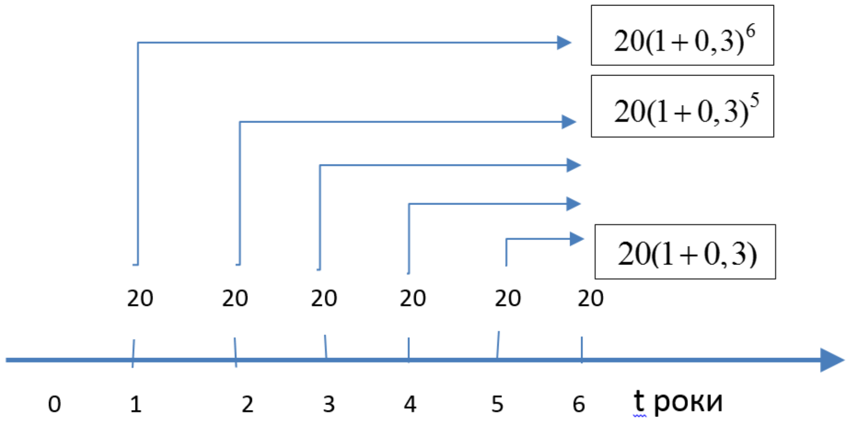


Рис. 1.4.2.

У цьому випадку є можливість щорічно одержувати орендний платіж та інвестування його (наприклад, банківський внесок).

У кінці шестирічного періоду накопичена сума буде дорівнювати:

$$PF_{post} = 20(1+0,3)^6 + 20(1+0,3)^5 + ... + 20(1+0,3) + 20 = 255{,}12 \text{ тис. грн.}$$

Таким чином зрозуміло, що варіант І є більш вигідним ніж варіант ІІ.

Звичайно оцінку обох варіантів можна проводити також з позиції теперішньої вартості. Для цього за формулою (1.4.2) обчислимо теперішню вартість варіантаІ

$$P_{post} = C \cdot a_{\overline{n}|} = 20 \cdot 2{,}6427 = 52{,}854 \text{ тис. грн.}$$

Теперішню вартість у випадку варіанта ІІ одержимо з співвідношення

$$V(0) = V(t)\left(1+r\right)^{-t};$$

$$V(0) = 240\left(1+0{,}3\right)^{-6};$$

$$V(0) = 49{,}728 \text{ тис. грн.}$$

Отже, і другий спосіб розв’язання демонструє, що варіант I є більш вигідним.

4. Експерти припускають, що у найближчі 5 років ефективна річна відсоткова ставка буде дорівнювати 10%, наступні 5 років – 6%. Людина купує 10-ти річний ануїтет з виплатою у кінці кожного року 1 000 грн. Обчисліть ціну такого ануїтету.

Розв’язання. Модель десятирічного ануїтету має вигляд:

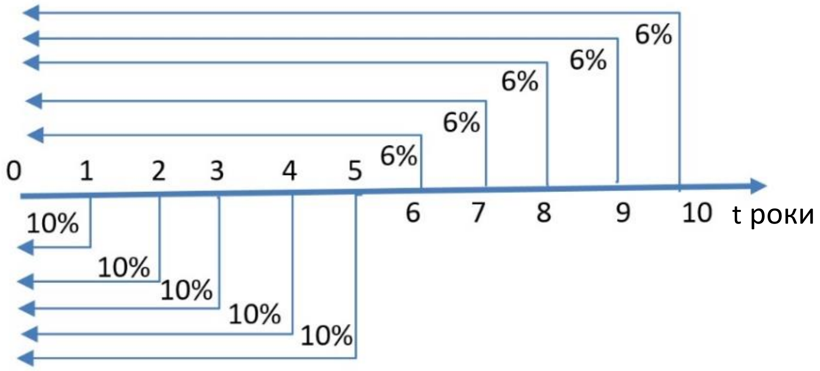


Рис. 1.4.3.

План виплат за ануїтетом представимо у вигляді таблиці.

Рік	*Внесок (грн.)*	*Дисконтний множник*	*Приведена сума (грн.)*
1	1000	$(1+0{,}1)^{-1}$	909,09
2	1000	$(1+0{,}1)^{-2}$	826,45
3	1000	$(1+0{,}1)^{-3}$	751,32
4	1000	$(1+0{,}1)^{-4}$	683,01
5	1000	$(1+0{,}1)^{-5}$	620,92
6	1000	$(1+0{,}1)^{-5}(1+0{,}06)^{-1}$	585,78
7	1000	$(1+0{,}1)^{-5}(1+0{,}06)^{-2}$	552,62
8	1000	$(1+0{,}1)^{-5}(1+0{,}06)^{-3}$	521,34
9	1000	$(1+0{,}1)^{-5}(1+0{,}06)^{-4}$	491,83
10	1000	$(1+0{,}1)^{-5}(1+0{,}06)^{-5}$	463,99

$$P_{post} = P_{post}(\textit{перші }\ 5\ \textit{років}) + P_{post}(\textit{з }\ 6-\textit{го по }10-\textit{й }\ \textit{роки}) =$$
$$=1000\cdot\left(1+0{,}1\right)^{-1}+\ldots+1000\cdot\left(1+0{,}1\right)^{-5}+$$
$$+1000\cdot\left(1+0{,}1\right)^{-5}\left(1000\cdot\left(1+0{,}06\right)^{-1}+\ldots+1000\cdot\left(1+0{,}06\right)^{-5}\right)=6406{,}35\ \textit{грн.}$$

Аудиторні задачі

1. Маємо змінний ануїтет постнумерандо (тис. грн): 20 , 12, 8, 45, 30. Обчисліть а) майбутню вартість ануїтету; б) теперішню вартість ануїтету, якщо його період співпадає з базовим періодом нарахування відсотків за складною відсотковою ставкою 25% річних, тобто дорівнює одному року. Як зміняться отримані оцінки, якщо початковий грошовий потік буде ануїтетом пренумерандо?

2. Знайти розмір рівних внесків в кінці року для двох наступних випадків, у кожному з яких передбачається нарахування річних відсотків на внески по ставці 8%.

а) Створити до кінця п’ятиріччя фонд, рівний 1 млн грн.

б) Погасити до кінця п’ятиріччя поточну заборгованість 1 млн грн.

3. Інвестор протягом 5 років робить внески в банк під складну відсоткову ставку 20% річних. Внески здійснюються на початку кожного кварталу. Знайти величину накопиченої на кінець 5-го року суми, якщо внесок за рік складає 10 000 грн.

4. Знайдіть ціну ануїтету пре- та постнумерандо для схеми простих відсотків із щорічною виплатою C .

5. Підприємець взяв кредит у розмірі 100 000 у.о. на 5 років, під складний відсоток 10%. Кредит повертається за схемою з амортизацією, з виплатами в кінці кожного року. Визначити величину щорічної виплати та скласти схему потоку платежів (табл.1.4.1)

Таблиця 1.4.1

Рік	Разовий платіж	Відсотки по залишку кредиту	Повернення основної суми	Залишок боргу
1 ⋮				
5				0

6. Бізнесмен орендував віллу за 10 000 у.о. на рік. Яка викупна ціна оренди при річній ставці складних відсотків 5%?

7. Вам пропонують віддати в оренду ділянку на три роки, обравши один з двох варіантів оплати оренди: а) 10 тис. грн. у кінці кожного року; б) 35 тис. грн.у кінці трирічного періоду. Який варіант є більш вигідним, якщо банк пропонує 20% річних за внесками?

8. Після впровадження заходів щодо зниження адміністративних видатків підприємство планує економити 1 тис. грн. щорічно. Зекономлені кошти будуть розміщені на депозитний рахунок під 15% річних з метою інвестування накопичених коштів через 5 років від впровадження заходів. Яку суму зможе інвестувати підприємство у кінці цього періоду?

9. Інвестор планує придбати 100 акцій компанії “ABC”. Передбачається щорічна виплата дивідендів від акцій за такою схемою: через 1 рік дивіденд за одну акцію складатиме 0,08 грн., ще через 1 рік величина дивіденда за акцію зросте на 8%, в порівнянні з минулорічним дивідендом, ще через 1 рік величина дивіденда за акцію зросте на 7%, в порівнянні з минулорічним дивідендом. Після цього дивіденди зростатимуть щорічно на 5% на рік. Яка сучасна вартість такого потоку дивідендів для ефективної ставки 7% на рік?

10. Перпетуум складається із щорічно зростаючих виплат $(1+k)$, $(1+k)^2$, $(1+k)^3,...$ у кінці кожного року. За ефективної ставки за рік 4 %, сучасна вартість такого потоку дорівнює 51 у.о. Знайдіть k.

Задачі для самостійної роботи

1. Ануїтет постнумерандо сплачується щопівроку протягом 12 років із річною виплатлю 1 000 грн. Ефективна відсоткова ставка становить 5% річних. Обчисліть накопичений ануїтет через 12 років.

2. Яку суму необхідно покласти в банк, щоб мати можливість на протязі наступних 8 років щорічно знімати з рахунку 25 тис. грн., вичерпавши рахунок повністю до кінця строку? Розв'язати задачу для випадку нарахування відсотків а) в кінці року за ставкою $r = 5\%$; б) на початку року за ставкою $r = 5\%$.

3. Протягом 3-х років на розрахунковий рахунок в кінці кожного року поступає по 10 у.о., на які нараховуються складні відсотки за річною ставкою 10%. Яку суму на рахунку отримають у кінці терміну?

4. Нехай $\alpha = \dfrac{P}{C}$ для ануїтету при простих відсотках, $\beta = \dfrac{P}{C}$ – при складних відсотках. Нехай передбачено n виплат за ануїтетами постнумерандо. Довести, що $\alpha = \beta$ при $n = 1$, але $\alpha < \beta$ при $n > 1$.

5. Чи будуть відрізнятись ціни перпетуума пре- та постнумерандо для простих відсотків? Відповідь обґрунтувати.

6. Для придбання будинку необхідно 100 000 у.о.. Взято кредит з амортизацією на 10 років під 6% річних, які нараховуються за схемою складних періодичних відсотків. Кожна виплата включає відсоток по залишку кредиту та відповідну частину основної суми. Після 8-ї виплати позичальник вирішив виплатити весь залишок по кредиту. Яка ця сума?

7. За якої відсоткової ставки, поточна вартість перпетуума буде рівна 51 000 грн., якщо щорічні внески на рахунок складають 5 500 грн.?

8. Клієнт у кінці року робить внесок на банківський рахунок у розмірі 4 тис грн. Банк виплачує складні відсотки зі ставкою 30% річних. Визначити суму, яка буде на рахунку клієнта через а) 3 роки; б) 8 років; в) 15 років. Як зміняться знайдені величини, якщо внески виконуються на початку кожного року?

9. Робітник укладає з фірмою контракт, згідно якого у випадку його постійної роботи до виходу на пенсію (у 65 років) фірма зобов'язується перераховувати у кінці кожного року протягом 25 років на рахунок робітника до банку однакові суми, які забезпечать робітнику після виходу на пенсію у кінці кожного року додаткові виплати у розмірі 8 000 грн. протягом 18 років. Яку суму щорічно має перераховувати фірма, якщо робітнику 40 років і припускається, що банк гарантує річну відсоткову ставку 20%?

10. В інвестиційний проект вкладено 2 тис. грн. на 4 роки. Планується наприкінці першого року одержати 500 грн., у кінці другого та третього років – по 1000 грн., а наприкінці четвертого – 300 грн. Оцінити віддачу від цього інвестиційного проекту при ставці дисконтування 10%.

Відповіді

Аудиторні задачі: ***1.*** *а) 171 015,2 грн. б) 56 041,7 грн. (пренумерандо: 213 769 грн., 70 048,8 грн.)* ***2.*** *а) 170444 грн., б) 250438,27 грн..* ***3.*** *83 496 грн.* ***4.*** $\frac{Cn}{1+(n-1)r}, \frac{Cn}{1+nr}$ *- ціни пре- та постнумерандо* ***5.*** *Щорічна виплата 26 379,8 у.о.* ***6.*** *200 000 у.о..****7.*** $PF_{post} = 36,4$ *тис.грн. Варіант а) є більш вигідним.* ***8.*** *6742,4 грн.* ***9.*** *418,79 грн. 10.* $k = 0,02$.

Задачі для самостійної роботи*:* ***1.*** *16 114,6 грн.* ***2.*** *а) 161580,3 грн, б) 169659,33 грн****. 3.*** *33,1 у.о.* ***4****. Вказівка: згадайте нерівність Бернуллі* ***5.*** *Не будуть, рівні* C/r *.* ***6.*** *24908,31 у.о* ***7.*** *10,8%.* ***8.*** *У кінці року а). 15,96 грн. б). 95,431 грн. в).669,145 грн. На початку року а). 20,748 грн. б). 124,060 грн. в).869,889 грн.* ***9.*** *81 грн. 57 коп.* ***10.*** *237,1 грн.*

<u>Контрольні питання до розділу 1</u>

1. Яка різниця між декурсивним та антисипативним способами нарахування відсотків?

2. Сформулюйте правила нарахування простих відсотків.

3. Доведіть формулу (1.1.3) для ефективності простих відсотків.

4. Поясніть поняття вексель. Наведіть приклад.

5. Доведіть адитивність ефективності для схеми простих відсотків.

6. Поясніть різницю між схемою нарахування простих та складних відсотків.

7. Сформулюйте правила нарахування складних відсотків.

8. Чому дорівнює ефективність інвестиції за схемою складних відсотків у загальному випадку?

9. Доведіть, що ефективність для схеми складних відсотків не адитивна величина.

10. Що вимірює ефективна ставка відсотків?

11. Чи пов'язані між собою схеми нарахувань складних періодичних та неперервних відсотків? Якщо пов'язані, то як?

12. Що характеризує сила росту?

13. Поясніть поняття еквівалентних відсоткових ставок.

14. Яка характеристика схеми неперервного нарахування відсотків має властивість адитивності?

15. Доведіть формулу (1.3.5).

16. Який грошовий потік називається потоком пренумерандо (постнумерандо)? Наведіть приклади.

17. Що таке ануїтет?

18. Який грошовий потік називається неперервним?

19. Розкрийте зміст поняття перпетуум.

20. Що називається кредитом з амортизацією?

Тестові завдання до розділу 1

1. *Кредит видано на суму 9 000 грн. за простою дисконтною ставкою 14% річних. Позичальник отримав суму 8 000 грн. На який час було видано кредит? Вважаємо, що у році 365 днів.*

А	Б	В	Г
320 днів	*290 днів*	*326 днів*	*312 днів*

2. *Сума внеску, яку потрібно покласти в банк строком га 2 роки під прості 10% річних, щоб в кінці 2-го року отримати 8400 грн, складає*

А	Б	В	Г
7 000 грн.	*6 720 грн.*	*6 942 грн.*	*7 115 грн.*

3. *Вексель видано на 10 тис. грн. із датою погашення 6.07.18, а власник векселя реалізував його в банку 5.05.18 по дисконтній ставці 8% річних. Яку суму отримає пред'явник векселя?*

А	Б	В	Г
8 803 грн.	*9 864 грн.*	*9 657 грн.*	*9 215 грн.*

4. *Через скільки років сума депозиту по складній відсотковій ставці 8% річних виросте з 10 000 грн. до 20 000 грн.?*

А	Б	В	Г
7 років	*9 років*	*10 років*	*11 років*

5. *З якою відсотковою ставкою необхідно вкласти гроші до банку, якщо через 2 роки вкладник хоче отримати 120 000 грн. при стартовому капіталі 100 000 грн.?*

А	Б	В	Г
10%	*7%*	*9%*	*11%*

6. *Борис хоче покласти на депозит 50 000 грн. на 5 років, щоб отримати не менше 75 000 грн. Один банк пропонує йому 8% річних, другий – 0,5% в місяць. Якому банку надати перевагу Борису, якщо відсотки складні?*

А	Б	В	Г
першому	*другому*	*жодному*	*для відповіді не вистачає даних*

7. *Нарощена вартість інвестиції при неперервному нарахуванні 16% за 6 років складає 100 тис. грн. Обчисліть її сучасну вартість.*

А	Б	В	Г
38 291 грн.	*41 044 грн.*	*38 289 грн.*	*51 020 грн.*

8. *Кредит видано на 5 років під неперервні відсотки із силою росту 8%. Яку номінальну річну ставку складних відсотків необхідно встановити, щоб в кінці 5-го року отримати таку ж нарощену суму при поквартальному нарахуванні відсотків?*

А	Б	В	Г
7,77%	*8,08%*	*8,33%*	*8,11%*

9. *Який із варіантів фінансової операції більш вигідний: 1) через 2 роки отримати 40 000 грн.; 2) отримати 35 000 грн зараз, якщо неперервні відсотки нараховуються протягом цих років із силою росту 12%?*

А	Б	В	Г
варіант 1) - більш вигідний	*варіант 2) - більш вигідний*	*варіанти 1) і 2) рівноцінні*	*для відповіді не вистачає даних*

10. *Яке значення щорічного внеску буде відповідати поточній вартості безстрокового ануїтету в 37100 грн, при відсотковій ставці 7,25%*

А	Б	В	Г
2 690 грн.	*511 724 грн.*	*34 410 грн.*	*4 205 грн.*

РОЗДІЛ 2.

Основні види фінансових активів

Фінансові активи − це фінансові ресурси, які контролюються організацією в результаті подій, що відбувались у минулому, від яких організація чекає вигоди у майбутньому. Прикладами фінансових активів є депозити, позики, цінні папери, чеки, прямі іноземні інвестиції, портфельні внески, казначейські зобов'язання, тощо.

У цьому розділі ми розглянемо властивості деяких частинних випадків цінних паперів − грошових документів, які засвідчують право власності з відповідністю до обов'язкових реквізитів таких, як дата випуску, термін існування, номінал. До цінних паперів відносять облігації, акції, деривативи, векселі, сертифікати. Розрізняють безризикові та ризикові фінансові активи. Безризикові активи характеризуються тим, що майбутні виплати за ними визначаються достовірно. Ризиковими вважаються активи розміри грошових надходжень за якими неможливо визначити завчасно, їх можна встановити лише з певною ймовірністю.

Нижче більш детально розглянемо властивості облігацій, акцій та опціонів.

2.1 Безризикові фінансові активи

Найпростішим прикладом цінних паперів є ***облігація,*** що випускається емітентом, а купується кредитором. Для облігацій характерний момент її реалізації (дата погашення) – фіксована дата, коли емітент виконує свої обов'язки перед кредитором. Як правило, обов'язки емітента – повернення грошей, які передані йому кредитором у момент купівлі облігації, і додаткової суми, що виплачується кредитору за право користуватись його грошима. Додаткова сума визначається фіксованою відсотковою ставкою r % (внутрішня дохідність облігації) і обчислюється за правилом складних відсотків. Номінальна вартість облігації – сума грошей, яку емітент зобов'язується повернути кредитору у момент реалізації облігації. Капітал вкладений в облігації називають безризиковим активом, оскільки дохід від внеску капіталу в облігації не залежить від коливання цін на ринку і тому передбачуваний.

Облігація з нульовим купоном передбачає виплату один раз, у момент її реалізації, після чого облігація припиняє своє існування. Організація-емітент обіцяє обміняти облігацію на суму номінальної вартості F у момент реалізації T. Ціна (сучасна вартість) такої облігації з терміном погашення через T років

$$V(0) = F(1+r)^{-T}.$$

Зазвичай облігацію можна придбати в будь-який момент до її реалізації T, тому її ціну $B(t,T)$ слід знати у момент $t \leq T$. Згідно формул дисконтування

$$B(t,T)=\begin{cases} F\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-m(T-t)}, \\ Fe^{-r(T-t)}. \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

Облігації з купонами окрім повернення номіналу передбачають регулярні виплати певної суми – купону. Як правило, купони виплачуються раз або два рази на рік; останній раз – в момент реалізації. Власник облігації може продати її у будь-який момент. Ціна облігації у момент продажу визначається її власником.

Розглянемо облігацію з номіналом F, реалізацією через T років, за якою виплачуються купони C в кінці кожного року. Така облігація створює потік із T виплат

$$\underbrace{C,\, C,\, ...,\, C,\, C+F}_{T\text{ виплат}}.$$

Якщо відома ставка r по складним неперервним відсоткам, то ціна такої облігації обчислюється за формулою

$$V(0)=Ce^{-r}+Ce^{-2r}+...+Ce^{-(T-1)r}+(C+F)e^{-Tr}=C\cdot\frac{1-e^{-Tr}}{e^{r}-1}+F\cdot e^{-Tr}.$$

Досить часто інвестиції на фінансових ринках здійснюються через фінансових посередників (наприклад, через інвестиційні банки), які за дорученням своїх клієнтів купують та продають облігації. Банк відкриває спеціальний рахунок кожному клієнту. Внесення коштів на цей рахунок означає, що клієнт здійснює купівлю відповідної кількості облігацій. Зняття коштів з рахунку – продаж частини облігацій. Таким чином, дохід інвестора формується від операцій з облігаціями.

Довга позиція інвестора в банку означає купівлю облігацій, а коротка – їх продаж.

Розглянемо інвестиції в облігації з нульовим купоном і номіналом $F=1$, які здійснюються через рахунок в банку-посереднику. Ціна облігації дорівнює $B(0,T)=e^{-Tr}$. Інвестиція $A(0)$ у.о. в банківський рахунок означає придбання

$A(0)/B(0,T)$ облігацій. Тоді сума $A(0)$, внесена на рахунок у початковий момент, у момент $t \le T$ буде дорівнювати

$$A(t) = \frac{A(0)}{B(0,T)} B(t,T) = A(0)e^{tr}.$$

Теорема 1. Закон зміни капіталу при інвестуванні в облігації такий самий як і для складних відсотків, що виплачуються неперервно.

Теорема 2. Закон зміни початкової інвестиції не змінюється з плином часу:

$$A(t) = A(0)e^{tr}, \quad t \ge 0.$$

Приклади.

1. Знайти сучасну вартість облігації з нульовим купоном та її відсоткову ставку для випадку складних відсотків, які нараховуються а) 4 рази на рік; б) неперервно, якщо $B(0,5;1) = 0,9312$, якщо її номінал $F = 1$.

Розв'язання. Ціна облігації в момент часу $t \le T$ обчислюється за формулою (2.1.1). Тому

а) $m = 4$: $B(0,5;1) = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^{-4(1-0,5)} = 0,9312$,

звідки отримуємо

$$j = 14,52\%.$$

Тоді сучасна вартість облігації

$$V(0) = B(0;1) = \left(1 + \frac{0,1452}{4}\right)^{-4} = 0,8671.$$

б) $m \to \infty$: $B(0,5;1) = e^{-r \cdot 0,5} = 0,9312$, тобто

$$r = 14,26\%.$$

Тоді сучасна вартість облігації

$$B(0;1)=e^{-0,1426}=0,8671.$$

2. Номінал облігації з нульовим купоном складає 1000 грн, ціна облігації – 800 грн. Реалізація наступає через 4 роки. Визначити відсоткову ставку (дохідність) облігації.

Розв'язання. Дохідність облігації з нульовим купоном визначається з рівняння

$$r=\sqrt[T]{\frac{F}{V(0)}}-1.$$

У нашому випадку $T=4$, $F=1000$ *грн.*, $V(0)=800$ *грн.* Тоді дохідність облігації дорівнює

$$r=\sqrt[4]{\frac{1000}{800}}-1=0,0574 \quad \text{або} \quad 5,74\%.$$

3. Знайти ціну 4-річної облігації номіналом 100 000 грн. і купоном 15%, що виплачується в кінці кожного півроку, якщо дохідність облігації складає 10%.

Розв'язання. Оскільки купон $100000\cdot 0,15=15\,000$ *грн.* виплачується двічі на рік, то величина виплати

$$C=\frac{15\,000}{2}=7\,500\,\text{грн.}$$

Усього виплат буде $2\cdot 4=8.$ Тому ціна облігації

$$V(0)=7500\cdot\left(\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{-2\cdot\frac{1}{2}}+\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{-2\cdot 1}+\ldots+\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{-2\cdot\frac{8}{2}}\right)+$$

$$+\frac{100000}{\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{-8}}=116\,158\,\text{грн.}$$

Аудиторні задачі

1. Інвестор придбав за 95$ облігацію з номіналом 100$ і строком реалізації через півроку. Коли ціна облігації досягне 99$? Вважаємо, що $m = 1$.

2. Знайти відсоткову ставку облігації для випадку складних відсотків, які нараховуються а) 1 раз на рік; б) 2 рази на рік; в) неперервно, якщо $B(0,5;1) = 0,9455$ для облігації з номіналом $F = 1$.

3. Банк розглядає доцільність придбання облігації з нульовим купоном номіналом 1000 грн, яка продається за ціною 750 грн. і яку буде погашено через два роки. При цьому банк має можливості альтернативного розміщення коштів з прибутковістю 14%.

4. Записати формулу для ціни облігації терміном 5 років з номіналом 100 у.о. та щорічними виплатами 10 у.о., якщо дохідність облігації складає r , відсотки нараховуються неперервно.

5. Знайти ціну облігації з $F = 100\$$, річним купоном 5% та реалізацією через 4 роки, якщо ставка складних неперервних відсотків а) 8%, б) 5%. Зробіть висновки.

6. Намалюйте графік ціни облігації із задачі 5 як функції ставки r. Яке значення функції при $r = 0$? Чому рівне $f(1)$? Чому дорівнює границя при $r \to \infty$?

7. По облігації обіцяють виплачувати по 5 у.о. в кінці кожного півроку протягом 5 років і ще 100 у.о. в кінці 5-го року. Знайти ціну облігації, якщо її дохідність при нарахуванні відсотків два рази на рік складає 5,91%.

8. Дохідність облігації номіналом 100 тис. грн. складає 11%. Облігацію випускають на 5 років, купон 7% виплачується щороку. Знайти ціну такої облігації.

9. По облігації обіцяють виплачувати по 10$ в кінці кожного півроку протягом 3 років і вкінці третього року 100$. Обчислити ціну облігації, якщо її дохідність при неперервному нарахуванні відсотків 7,7%.

10. Визначити коефіцієнт повернення для інвестиції на 75 днів для однорічної облігації з нульовим купоном, якщо $B(0,1)=0,89$ і якщо застосовується схема складних періодичних відсотків з $m=1$. Вважаємо, що $F=1$.

11. Нехай 1 грн. інвестували у облігацію з нульовим купоном, яка реалізується через 1 рік. Кожного року вся накопичена сума реінвестується у нові облігації того ж типу (відсотки нараховуються неперервно). Скільки облігацій буде придбано в кінці 9-го року? Відповідь записати як функцію r.

Задачі для самостійної роботи

1. Інвестор придбав облігацію з нульовим купоном номіналом 100 тис. грн. і строком погашення 10 років. Обчисліть ціну облігації, якщо її дохідність складає 8%.

2. Інвестору пропонують придбати облігацію з нульовим купоном за 75 000 грн. і номіналом 120 000 грн., строком на 4 роки. Чи варто здійснювати покупку, якщо протягом 4 років існує можливість вкладання коштів під 7% річних?

3. Інвестору пропонують придбати облігацію з нульовим купоном за 75 000 грн. і номіналом 120 000 грн., строком на 4 роки. Чи варто здійснювати покупку, якщо існує можливість вкладання коштів у перший рік під 6% річних, потім ставка росте на 1% в рік?

4. Банк погодився надати кредит в розмірі 200 000 грн. на 10 років. За умовами кредитування щомісячні платежі боржника повинні бути однаковими. Яким буде щомісячний платіж, якщо річна номінальна відсоткова ставка, встановлена банком, складає 8%?

5. Знайти дохідності облігацій А і В при неперервному нарахуванні відсотків, за даними з таблиці 2.1.1.

Таблиця 2.1.1

Облігація	Платежі, у.о., по роках		
	0	1	2
А	-934,58	1000	-
В	-946,93	50	1050

6. По облігації строком реалізації 1 рік виплачується щорічний купонний дохід у розмірі 4%. Ціна облігації складає 92% від номіналу. Знайти дохідність облігації.

7. За облігацією обіцяють виплачувати по 3 у.о. в кінці кожного кварталу протягом 3 років і ще 100 у.о. в кінці 3-го року. Знайти ціну облігації, якщо її дохідність при нарахуванні відсотків 4 рази на рік дорівнює 3,94%.

8. Коефіцієнт повернення (ефективність) для інвестиції на 6 місяців для облігації з нульовим купоном дорівнює 6%. Знайти відповідну відсоткову ставку r для схеми складних неперервних відсотків, якщо номінал дорівнює 1.

9. Обчисліть сучасну вартість облігації номіналом 18 000 грн. з виплатою щорічного купона 12% (в кінці кожного року) і строком погашення через 3 роки. Ставка відсотка по вкладу в банку складає 14% річних.

Відповіді

Аудиторні задачі: ***1.*** *147 днів.* ***2.*** *а) 11,86%, б) 11,53%, в) 11,2% .* ***3.*** *Вигідніше купити облігацію за 750 грн.* ***4.*** $V(0)=10e^{-r}+10e^{-2r}+\dots+10e^{-4r}+(10+100)e^{-5r}$. ***5.*** *а) 89,06$, б)99,55$. Чим менша ставка, тим більша ціна облігації.* ***6.*** *f(1)=4,7;* $\lim\limits_{r\to\infty} f(r)=0$. ***7.*** *117,48 у.о.* ***8.*** *85 216,81 грн..* ***9.*** *131,92$.* ***10.*** $\approx 2{,}43\%$. ***11.*** e^{10r} *облігацій.*

Задачі для самостійної роботи**:** ***1.*** *46,3 тис. грн.* ***2.*** *Вигідніше придбати облігацію за 75000 грн.* ***3.*** *Вигідніше придбати облігацію за 75000 грн.* ***4.*** $C=2426{,}55$ *грн.* ***5.*** *А: r=6,8%, В: r=7,7%.* ***6.*** *r=13%.* ***7.*** *122,70 у.о..* ***8.*** *11,65 %.* ***9.*** *17 164 грн.*

2.2 Ризикові фінансові активи

І. Акції. ***Акції (stocks)*** (це, як правило цінні папери) випускаються організаціями (емітентами), які хочуть залучити додаткові фінансові кошти. При продажу акції, емітент отримує кошти, які використовує для своєї діяльності. Покупці акцій (інвестори) стають співвласниками організації–емітента з правом приймати участь в діяльності цієї організації та отримувати дивіденди від цієї діяльності.

Ціна акції не є фіксованою величиною з плином часу. Прибуток від вкладу капіталу в акції є непередбачуваним, більш того, його величина може бути від'ємною, що є еквівалентним збитковості інвестора. Тому купівля акції є ризиковою операцією, а самі акції називаються ризиковими активами.

Нехай $S(t)$ – ціна акції в момент t, до того ж $S(t) : \Omega \to (0;\infty)$, $\forall t$. Множина Ω складається з усіх можливих сценаріїв, тобто ціна акції залежить не лише від часу, а й від обраного сценарію розвитку: $S(t, \omega)$.

II. Коефіцієнт повернення. Динаміку цін зручно виражати через коефіцієнт повернення.

Означення 1. Коефіцієнтом повернення $K(n,m)$ на інтервалі $[n,m]$ називають випадкову величину

$$K(n,m) = \frac{S(m) - S(n)}{S(n)}.$$

Коефіцієнт повернення на інтервалі $[n-1, n]$ позначимо $K(n)$, тобто

$$K(n) = K(n-1, n) = \frac{S(n) - S(n-1)}{S(n-1)}.$$

Коефіцієнт повернення не є адитивним, тобто

$$K(1) + K(2) + \ldots + K(n) \neq K(0,n).$$

Якщо $n < m$, тоді коефіцієнти повернення пов'язані співвідношенням

$$1+K(n,m)=(1+K(n+1))(1+K(n+2))\cdot\ldots\cdot\ 1+K(m)\ .$$

Якщо розподіл коефіцієнту повернення є відомою величиною, то можна знайти його математичне сподівання, яке і має назву очікуване повернення.

Очікуване повернення не є мультиплікативним. Якщо ж $K(n+1),\ldots,K(m)$ є незалежними випадковими величинами , то

$$E(1+K(n,m))=E((1+K(n+1))E(1+K(n+2))\cdot\ldots\cdot E\ 1+K(m)\ .$$

ІІІ. Неперервний час. Доцільно розглядати зміну ціни акції при неперервному часі. Ця модель є актуальною, якщо вважати, що моменти можливих змін ціни на акцію неперервним чином заповнюють певний часовий проміжок.

Позначимо через S_t ціну акції у момент часу t, тоді зміна ціни за час Δt буде $\Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t$. При малих Δt розглянемо прирости логарифмів цін:

$$R_t \stackrel{def}{=} \ln S_{t+\Delta t} - \ln S_t = \ln\left(1+\frac{\Delta S_t}{S_t}\right) \approx \frac{\Delta S_t}{S_t}.$$

Ціна акції R_t є абсолютно випадковим явищем, на яке впливають багато різноманітних обставин. Тому в силу центральної граничної теореми R_t має бути гаусівською випадковою величиною.

Якщо вважати, що прирости незалежні; $E[R_t]=0$; дисперсія $\mathrm{var}[R_t]$ пропорційна Δt, то в силу неперервності S_t та початкової умови $R_0=0$, процес $\ln \mathrm{S}_t$ є ***вінерівським процесом***, тобто

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \approx \sigma \Delta w(t) \quad \text{або} \quad dS_t \approx \sigma S_t dw(t).$$

Більш реалістичною є ситуація, коли R_t має деякий невипадковий ***тренд***. Наприклад, інфляція с деяким коефіцієнтом росту вносить зміни до вартості акції. У випадку лінійного тренду (типу інфляції) маємо

$$R_t = c\Delta t + \sigma\Delta w(t),$$

тобто

$$\frac{S_t'}{S_t} \approx c\Delta t + \sigma\Delta w(t), \text{ або } dS_t = S_t(cdt + \sigma dw(t)).$$

Це рівняння описує ціну акції: константа c називається ***коефіцієнтом повернення капіталу***, а σ називається ***коефіцієнтом впливу випадкових явищ на процес ціноутворення***.

Відмітимо, що отримані співвідношення можемо інтерпретувати не строго. Строгий підхід можливий в рамках теорії стохастичних диференціальних рівнянь.

Кожен інвестор вкладає свій капітал при купівлі акцій та облігацій, тобто ризикових та неризикових активів. Уявлення інвестора про вигідність таких операцій виражаються в його ***стратегії.*** Стратегією називається пара чисел (a_t, b_t), що залежать від часу.

У кожен момент часу t числа (a_t, b_t) — це частини капіталу інвестора, які вклали в акції та облігації.

Стратегію інвестора також називають його ***портфелем***. Величина портфелю визначається як число

$$V_t = a_t S_t + b_t B_t,$$

де S_t та B_t — це ціни однієї акції та однієї облігації у момент часу t.

У практичній діяльності на розмір портфеля впливають і самі операції купівлі/продажу, за які також потрібно платити.

Приклади.

1. Розглянемо ринок, для якого можливими є лише два сценарії: бум та регресія. У початковий момент часу акція коштує 10$. Для першого сценарію її ціна зросте до 12$, а для другого знизиться на 7$. Виписати усі можливі сценарії.

Розв'язання. У цьому прикладі є два можливих сценарії: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Тоді

Сценарії	$S(0)$	$S(1)$
ω_1	10$	12$
ω_2	10$	7$

2. Ціна акції сьогодні складає $30\$$. За даними таблиці 2.2.1 знайти ціни на акції та зобразити граф зміни ціни акції.

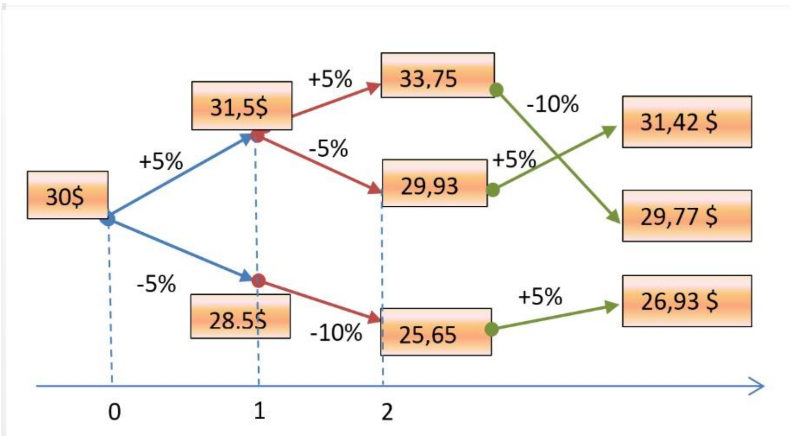
Таблиця 2.2.1

Сценарій	$K(1)$	$K(2)$	$K(3)$
ω_1	**5%**	**5%**	**-10%**
ω_2	**-5%**	**-10%**	**5%**
ω_3	**5%**	**-5%**	**5%**

Розв'язання. Оскільки $K(n) = \dfrac{S(n) - S(n-1)}{S(n)}$, то для знаходження ціни акції кожного дня відповідно до сценарію скористаємось співвідношенням

$$S(n) = (1 + K(n))S(n-1),$$

а результати представимо у вигляді графу



3. Інвестор придбав акції компанії А за 20 млн. грн. та акції компанії В за 18 млн. грн. Компанія А обіцяє 40% річних, але може збанкрутувати з ймовірністю 0,3, компанія В обіцяє 30% річних, але може збанкрутувати з ймовірністю 0,2. Будемо вважати, що банкрутства компаній є незалежними. Скласти ряд розподілу випадкової величини X − суми цін акцій компаній А та В через рік, що придбав інвестор.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі випадкова величина X може набувати таких значень:

$x_1 = 0$ − обидві компанії збанкрутують;

$x_2 = 20(1+0,4) = 28$ *млн. грн.* − збанкрутує лише компанія В;

$x_3 = 18(1+0,3) = 23,4$ *млн.грн.* − збанкрутує лише компанія А;

$x_4 = 28 + 23,4 = 51,4$ *млн. грн.* − жодна з компаній не збанкрутує.

Для побудови ряду розподілу випадкової величини X достатньо обчислити ймовірності подій $\{X = x_i, i = 1,2,3,4\}$. Розглянемо додатково дві події $H_1 = \{\text{збанкрутує компанія } A\}$, $H_2 = \{\text{збанкрутує компанія } B\}$. Зауважимо, що події H_1 та H_2 є незалежними. Тому

$$P\{X = x_1\} = P(H_1)P(H_2) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06; \quad P\{X = x_2\} = P(\bar{H}_1)P(H_2) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14;$$

$$P\{X = x_3\} = P(H_1)P(\bar{H}_2) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24; \; P\{X = x_3\} = P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Тоді ряд розподілу матиме вигляд:

Ціна суми акцій X	0	28	23,4	51,4
$P(x)$	0,06	0,14	0,24	0,56

Розв'язання. Зрозуміло, що ціна акції $S(t)$ є гауссівською випадковою

4. Згідно з моделлю Башельє, ціна акції змінюється за законом $S(t) = \sigma W(t) + \mu t,\ \sigma \neq 0,\ \mu \in R$ − сталі, $W(t)$ — вінерівський процес (гаусівський процес з нульовим середнім та дисперсією рівною t). Довести, що для всіх $T > 0,\ \sigma \neq 0,\ \mu \in R$ ймовірність того, що ціна

величиною. Знайдемо її характеристики.

акції $S(T)$ від'ємна, є додатною (це є незручністю у використанні вказаної моделі).

Середнє значення:

$$E[S(t)] = E[\sigma W(t) + \mu t] = \sigma \cdot 0 + \mu t.$$

Дисперсія:

$$\mathrm{var}[\mathrm{S(t)}] = E[S(t)]^2 = E[\sigma W(t) + \mu t]^2 = E[\sigma^2 W^2(t)] + E[2\mu t W(\mathrm{t})] + \mathrm{E}[\mu^2 t^2] =$$

$$= \sigma^2 E[W^2(t)] + 2\mu t E[W(\mathrm{t})] + \mu^2 t^2 = \sigma^2 t + \mu^2 t^2.$$

Тоді

$$\mathrm{P}\{S(t) < 0\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + \mu^2 t^2)}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2(\sigma^2 t + \mu^2 t^2)}} > 0\,.$$

Аудиторні задачі

1. Акція продається за 40$. Очікується, що в кінці кожного року будуть виплачуватись дивіденди у розмірі 2$. Припускається, що через 2 роки її можна буде придбати за 50$. Визначити кінцеву вартість акції та середньорічну дохідність інвестиції в цю акцію (номінальну відсоткову ставку) при нарахуванні відсотків, якщо дивіденди реінвестуються під річну відсоткову ставку 5% при нарахуванні відсотків один раз на рік.

2. Припустимо, що ціна акції кожного дня може бути вищою на 5% або нижчою на 4% ніж попереднього дня. Нехай ціна акції сьогодні дорівнює 20$. Побудувати граф ціни акції в наступні 3 дні. Скільки всього сценаріїв може бути в наступні 3 дні.

3. Ціна акції сьогодні 45$. Використовуючи дані таблиці 2.2.2, зобразити граф зміни ціни акції.

Таблиця 2.2.2

Сценарій	$K(1)$	$K(2)$	$K(3)$
ω_1	10%	5%	-10%
ω_2	5%	10%	10%
ω_3	5%	-10%	10%

4. Як зміняться ціни акцій у задачі 3, якщо в кінці кожного часового періоду виплачуються дивіденди у розмірі 1$?

5. Для задачі 3 знайти коефіцієнти повернення $K(0,2)$ та $K(0,3)$ і порівняти результати зі значеннями $K(1)+K(2)$ та $K(1)+K(2)+K(3)$. Зробити висновки.

6. Відомо, що ціна акції сьогодні дорівнює 35$ та коефіцієнт повернення за перший день дорівнює коефіцієнту повернення другого дня. Про ціну акції першого дня торгів нічого не відомо, але відомо, що на другий день торгів ціна акції у випадку буму становить 41$, у випадку стагнації 32$, а при рецесії 28$. Знайти коефіцієнти повернення за перший та другий дні, ціна акцій за перший день.

7. Ціна акції сьогодні дорівнює 100$, розподіл зміни ціни акції зображено на рисунку 2.2.1

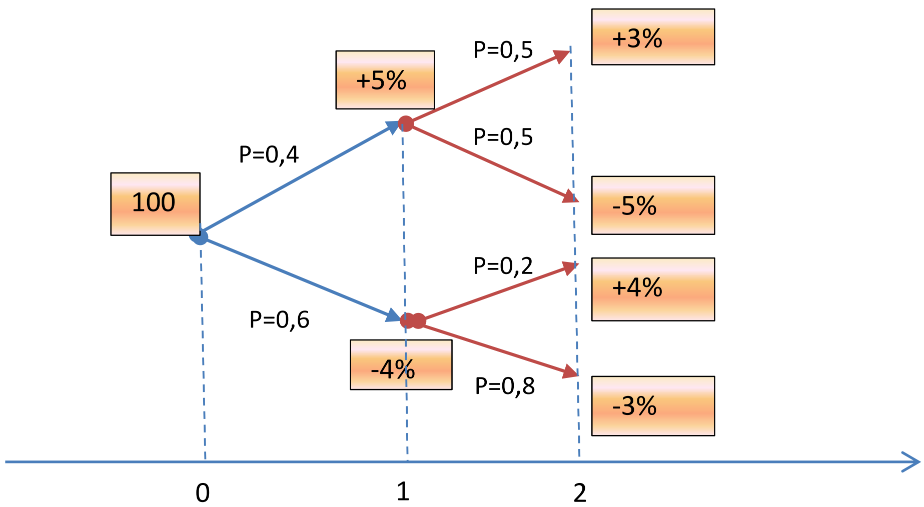


Рис. 2.2.1

Знайти ціни акцій в кінці кожного з періодів, очікувані повернення за кожний з періодів та за весь період зображеного фондового ринку.

8. Нехай квартальні коефіцієнти повернення є однаково розподіленими незалежними випадковими величинами $K(1),\ K(2), K(3), K(4)$. Знайти очікуване повернення за квартал $E[K(1)]$ та за рік $E[K(0,4)]$, якщо $E[K(0,3)] = 12\%$.

9. Зміна ціни акції може бути наближена нормальним розподілом з математичним очікуванням 15,28 грн і середнім квадратичним відхиленням 0,12 грн. Знайдіть ймовірності того, що ціна акції виявиться: а) не нижче 15,50 грн; б) не вище 15,00 грн; в) між 15,10 і 15,40 грн.

10. Випадкові коливання цін акцій двох компаній на день ξ та η мають спільний розподіл, наданий таблицею:

ξ \ η	–1	+1
–1	0,3	0,2
+1	0,1	0,4

Знайти коефіцієнт кореляції.

Задачі для самостійної роботи.

1. Акція продається за 50\$. Очікується, що вкінці кожного року будуть виплачуватись дивіденди у розмірі 1,5 \$, а в кінці третього року акцію можна буде продати за 55 \$. Визначити вартість акції в кінці 3 року та середньорічну дохідність інвестиції в акцію при нарахуванні відсотків двічі на рік, якщо дивіденди реінвестують під річну ставку 6% при нарахуванні відсотків двічі на рік.

2. Зміни ціни акції задані в таблиці 2.2.3. Знайти коефіцієнти повернення за кожний з періодів та за весь період діяльності фондового ринку, зобразити граф зміни цін акції.

Таблиця 2.2.3

Сценарій	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	25	31	28

ω_2	25	24	27
ω_3	25	29	30

3. Акція продається за ціною 950 $. Розподіл вартості акції через 2 роки подано у таблиці 2.2.4. Знайти коефіцієнти повернення та очікуване повернення за весь період діяльності такого фондового ринку.

Таблиця 2.2.4

Ймовірність	0,1	0,15	0,05	0,2	0,3	0,2
Вартість	920	930	950	965	960	980

4. Знайти ціни акцій в кінці першого періоду заданого фондового ринку (Рис. 2.2.2), очікувані повернення за кожний з періодів та за весь період.

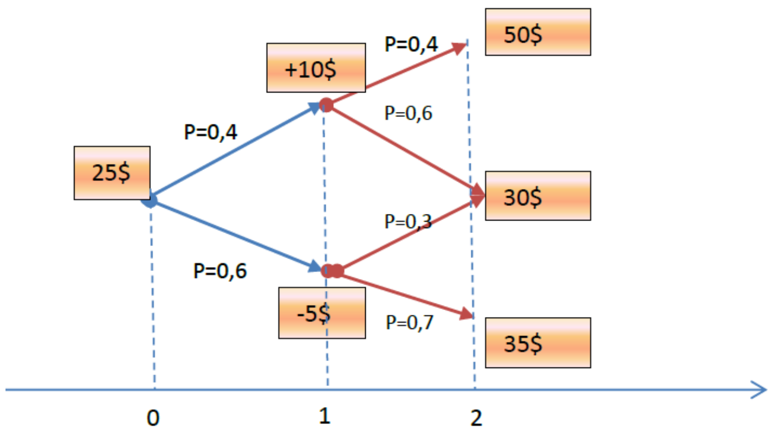


Рис. 2.2.2

5. Нехай $K(1) = 10\%$ або -10%, $K(0,2) = 21\%$, 10% або 1%. Знайдіть структуру сценаріїв таку, що $K(2)$ приймає не більше двох різних значень.

6. Очікується три сценарії розвитку подій на фінансовому ринку: рецесія, стагнація та бум із ймовірностями $1/2$, $1/4$, $1/4$, відповідно. Для перших двох сценаріїв передбачається повернення -5%, $+6\%$, відповідно. Крім того, експерти вважають, що очікуване повернення інвестицій буде складати 6%. Знайти коефіцієнт повернення у випадку бума (для третього сценарію).

7. Інвестиційна компанія на даний момент продає акції за 15 $ за 1 шт. Інвестор планує купівлю пакета акцій та передбачає зберігання їх протягом року.

Нехай X – випадкова величина, що означає ціну однієї акції через рік. Ряд розподілу X задано в таблиці:

Ціна акції (X)	16	17	18	19	20
$P(x)$	0,35	0,25	0,25	0,10	0,05

Знайти середнє очікуване значення ціни акції через 1 рік. Визначити дисперсію ціни акції через рік. Знайти коефіцієнти повернення.

Відповіді

Аудиторні задачі: ***1.*** *16,3 %.* ***2.*** *Всього можливо 8 сценаріїв.* ***3.*** $S(1,\omega_1)=49,5;\ S(1,\omega_2)=S(1,\omega_3)=47,25;\ S(2,\omega_1)=S(2,\omega_2)=51,975;\ S(2,\omega_3)=45,525;\ S(3,\omega_1)=S(3,\omega_3)=46,778;$ $S(3,\omega_2)=57,173$. ***4.*** $S(n)=S(n-1)(1+K(n))-\mathrm{div}(n)$. ***5.*** *Якщо знак однокрокового коефіцієнту повернення чергується, то коефіцієнт повернення за весь період менший за суму однокрокових коефіцієнтів.* ***6.*** $K(1)(\omega_1)=K(2)(\omega_1)=8,2\%$, $K(1)(\omega_2)=K(2)(\omega_2)=-4,4\%$, $K(1)(\omega_3)=K(2)(\omega_3)=-10,56\%$. ***7.*** $E[K(1)]=-0,004$, $E[K(2)]=-0,0136$, $E[K(0,2)]=-0,0174$. ***8.*** $E[K(1)]=3,9\%$, $E[K(0,4)]=16,368\%$. ***10.*** *0,408.*

Задачі для самостійної роботи: ***1.*** *59,78*$, *6,14%.* ***2.*** $K(0,2)(\omega_1)=0,12$, $K(0,2)(\omega_2)=0,08$, $K(0,2)(\omega_3)=0,2$. ***3.*** $E[K(0,2)]=0,00655$. ***4.*** $E[K(1)]=-0,24$, $E[K(0,2)]=0,412$. ***5.*** *Один із можливих варіантів:* $K(2)(\omega_1)=K(2)(\omega_3)=0,1$, $K(2)(\omega_3)=0$. ***6.*** $K(\omega_3)=28\%$.

2.3 Вторинні фінансові активи

На багатьох фінансових ринках самі активи не продаються і не купуються. Їх замінюють вторинні цінні папери. Прикладом найбільш різноманітних вторинних цінних паперів вважають опціони. Опціони на товари та акції використовуються уже декілька століть. У часи “ тюльпаноманії ” (1637 р.) торговці надавали виробникам тюльпанів право продавати вирощені цибулини за фіксованою мінімальною ціною (сьогодні це назвали б *put* опціон). В свою чергу торговці також сплачували винагороду виробникам тюльпанів за право купити врожай цибулин за фіксованою мінімальною ціною (сьогодні це назвали б *call* опціон).

Опціон (option) – контракт, який дає право купити або продати певний актив за визначеною ціною і у визначений момент майбутнього. ***Call* опціон** дає право його власнику (але не зобов'язує його) купити актив, наприклад, акцію, за фіксованою ціною у момент реалізації опціону. ***Put* опціон** дає право його власнику (але не зобов'язує його) продати акцію за фіксованою ціною у момент реалізації опціону.

Особливістю *call* опціону є те, що його власник (інвестор) не зобов'язаний його реалізовувати (купляти акцію), однак друга сторона такого контракту (брокер) зобов'язана продати акцію, якщо перша вимагатиме цього. Крім того опціон має вартість: інвестор платить брокеру певну суму при купівлі опціону. Це компенсує нерівноправність сторін цього виду контрактів.

Нехай K - *ціна акції*, зафіксована в опціоні, або *страйкова ціна (strike price).* T - *момент реалізації* або *дата виконання (exercise time)* опціону, тобто останній день, в який опціон може бути виконаний. S_T - ціна акції у момент часу T.

Якщо в опціоні фіксується дата (момент реалізації), коли має відбутись продаж (купівля) акції, то це ***європейський опціон*.** Якщо фіксується дата, **<u>до</u>** якої має відбутись продаж (купівля), то це ***американський опціон*.**

Власник опціону, той хто придбав його у продавця, займає ***довгу позицію***, а продавець, який випустив або підписав цей опціон, - ***коротку позицію*** за даною угодою.

Опціон характеризується своєю виплатою. Власник європейського *call* опціону реалізує його, тобто придбає акцію у момент T за страйковою ціною K, якщо $S_T > K$. Потім продасть її на ринку і отримає прибуток рівний $S_T - K$. Якщо ж $S_T \le K$, то інвестор не реалізує опціон, бо на ринку у момент T можна придбати акції за меншою ціною, і несе збиток рівний вартості опціону, сплаченої при його купівлі. Тому виплата власнику європейського *call* опціону складає

$$(S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K, \\ 0, & S_T \le K. \end{cases}$$

Власник європейського *put* опціону реалізує його, тобто продасть акцію у момент T за страйковою ціною K, якщо $K > \mathrm{S}_T$. А потім придбає на ринку акцію за ціною S_T і отримає прибуток рівний $K - \mathrm{S}_T$. Відповідно виплата за європейським *put* опціоном складає

$$(K - \mathrm{S}_T)_+ = \begin{cases} K - \mathrm{S}_T, \ K > \mathrm{S}_T, \\ 0, \ K \le \mathrm{S}_T. \end{cases}$$

Позначимо через F ціну опціону у момент угоди і встановимо, яку ціну доцільно платити при його купівлі. Нехай опціон купують у момент $t = 0$ і ціна акції у цей момент рівна S_0. Вважаємо, що у інвестора існує можливість вкладати капітал у безризикові активи із відсотковою ставкою r. Якщо момент реалізації опціона рівний T, а K - ціна акції, зафіксована в опціоні, то ***арбітражною ціною опціона*** називається число

$$F_A = S_0 - Ke^{-rT}.$$

Ціна F_A опціону гарантує, що не існує стратегії, яка принесе безризиковий дохід, тобто незалежно від зміни цін на акцію. Ціна F_A для моделей фінансового ринку означає “відсутність арбітражу”.

Якщо інвестор у майбутній момент T планує продати деякі активи і придбав європейський *put* опціон за ціною P_p на ці активи з датою виконання T, то прибуток інвестора дорівнює

$$\Pr(\mathrm{S}_T) = \begin{cases} K - (\mathrm{S} + \mathrm{P}_p)\mathrm{e}^{r(\mathrm{T}-\mathrm{t})}, \ \mathrm{S}_T \le K, \\ \mathrm{S}_T - (\mathrm{S} + \mathrm{P}_p)\mathrm{e}^{r(\mathrm{T}-\mathrm{t})}, \ \mathrm{S}_T > K. \end{cases}$$

Якщо інвестор у майбутній момент T планує придбати деякі активи і придбав європейський *call* опціон за ціною P_c на ці активи з датою виконання T, то прибуток інвестора дорівнює

$$\Pr(\mathrm{S}_T) = \begin{cases} -\mathrm{S}_T + (\mathrm{S} - \mathrm{P}_c)\mathrm{e}^{r(\mathrm{T}-\mathrm{t})}, \ \mathrm{S}_T \le K, \\ -K + (\mathrm{S} - \mathrm{P}_c)\mathrm{e}^{r(\mathrm{T}-\mathrm{t})}, \ \mathrm{S}_T > K. \end{cases}$$

Приклади.

1. Вартість 4 місячного європейського *put* опціону на акцію із страйковою ціною $100\$$ складає $5\$$. Купівля опціону фінансується кредитом під 6%, що нараховуються неперервно. Ринкова ціна акції (у момент реалізації) 1) знизилась до $70\$$, 2) підвищилась до $125\$$. Обчисліть виграш власника такого опціону.

Розв'язання. З умови маємо, що $T = 4$ міс., $K = 100\$$, $P_p = 5\$$, $r = 6\%$, $S_T = 70\$$ або $125\$$.

1) Якщо ціна на акцію знизилась і $S_T = 70\$ < K = 100\$$, то власник реалізує опціон і виграє $(K - S_T)_+ = 30\$$. Але у момент реалізації власник має повернути кредит на купівлю опціону, тобто $5 \cdot e^{0{,}06 \cdot \frac{4}{12}} = 5{,}1\$$.

Отже, остаточний виграш власника рівний $30 - 5{,}1 = 24{,}9\$$.

2) Якщо ціна на акцію підвищилась і $S_T = 125\$ > K = 100\$$, то власник не реалізує опціон, оскільки це не вигідно і нічого не виграє. Але борг за кредитом $5{,}1\$$ має повернути. Тому виграш інвестора $-5{,}1\$$, що означає, що він залишається у програші.

2. Запишіть функцію виплат (від ціни акції S) за наступними цінними паперами;

1) куплено 1 *call* опціон і 2 *put* опціони зі страйковими цінами K (*страйк*);

2) куплено 1 *call* опціон зі страйком K_1 і продано 1 *call* опціон зі страйком K_2, $K_1 < K_2$ (*спред бика*).

Розв'язання. 1) Виплата від 1 *call* опціону складатиме $(S_T - K)_+$, а від 2 *put* опціонів − $2 \cdot (K - S_T)_+$. Тоді загальна виплата дорівнює

$$F(S_T) = (S_T - K)_+ + 2\cdot(K - S_T)_+ = \begin{cases} 2\cdot(K - S_T), \ K > S_T, \\ S_T - K, \ K \le S_T. \end{cases}$$

2) Виплата від 1 *call* опціону складатиме $(S_T - K_1)_+$. Виплата від проданого *call* опціону складатиме $-(S_T - K_2)_+$.

Загальна виплата

$$F(S_T) = (S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0, \ S_T < K_1, \\ S_T - K_1, \ K_1 \le S_T < K_2, \\ K_2 - K_1, \ K_2 \le S_T. \end{cases}$$

3. Побудувати графік виплат (від ціни акції S) за наступними цінними паперами: придбано 1 *call* опціон із страйковою ціною K та 2 *put* опціони із страйковою ціною $2K$.

Розв'язання. Виплата від *call* опціону із страйковою ціною K дорівнює $(S - K)_+$ виплата від двох *put* опціонів складає $2(2K - S)_+$. Тоді загальна виплата як функція ціни акції S дорівнює

$$F(S) = (S - K)_+ + 2(2K - S)_+ = \begin{cases} 2(2K - S), \ S < K, \\ 3K - S, \ K \le S < 2K, \\ S - K, \ 2K \le S. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції виплат:

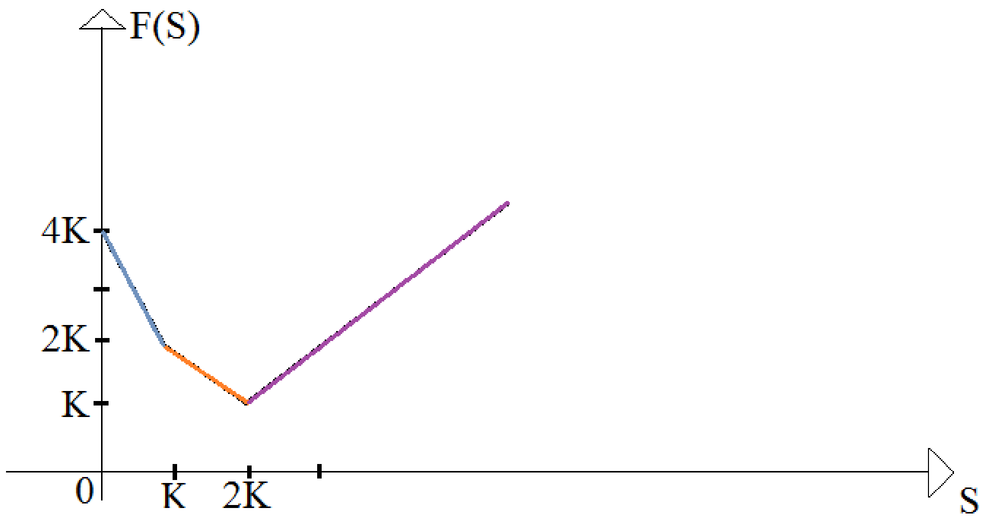


Рис. 2.3.1

Аудиторні задачі

1. 22 березня 1997 року *call* опціон на акцію Rolls Royce зі страйковою ціною 220 пенсів з датою виконання 22 травня 1997 року продали за 19,5 пенсів на Лондонській міжнародній біржі. Купівля цього опціону профінансована кредитом під 5,23%, що нараховуються неперервно. За якої ціни на акцію на дату реалізації опціону здійснена інвестиція принесе прибуток?

2. Прибуток за європейським *put* опціоном зі страйковою ціною $36\$$ і терміном реалізації через 3 місяці склав $3\$$. Якою є ціна акції на дату виконання опціону, якщо його придбали за $4,5\$$, які фінансуються кредитом під 12%, що нараховуються неперервно.

3. Інвестор займає довгі позиції в європейських *call* і *put* опціонах на одні і ті ж активи зі страйковими цінами X_1 та X_2, відповідно. Знайти виграш інвестора, якщо дати виконання опціонів співпадають, а ціни активів на момент виконання опціонів дорівнюють S_T.

4. Інвестор через 6 місяців планує продати акцію (без дивідендів), поточна вартість якої $100\$$. Поточна вартість 6-ти місячного європейського *put* опціону на акцію із страйковою ціною $98\$$ дорівнює $3\$$, а безризикова відсоткова ставка при неперервному нарахуванні відсотків складає 8%. Оцінити прибуток від хеджування початкової позиції, якщо ціна на акцію через 6 місяців буде а) $110\$$, б) $90\$$.

5. Задано 6-тимісячний європейський *put* опціон на акцію, по якій через 2 і 4 місяці очікується дивіденди по 2$ (кожний раз). Поточна ціна акції 48$, страйкова ціна - 48$, безризикова відсоткова ставка 8% (нарахування неперервне). Ринкова ціна опціону 1,8$. Вкажіть прибуткову арбітражну стратегію і величину прибутку.

6. Нехай S_t - вартість акції в момент часу $t \geq 0$, K - страйкова ціна, відсотки нараховуються неперервно зі ставкою r. Знайти капітал інвестора у момент T, який у момент t

а) має 1 *call* опціон та 1 *put* опціон;

б) має 1 *call* опціон зі страйковою ціною K_1 та продає 1 *put* опціон зі страйковою ціною K_2.

7. Побудувати графіки виплат (від ціни акції S) за наступними цінними паперами:

1) продано 1 акцію, придбано 2 *call* опціони; страйкова ціна для всіх K (*стреддл* або *стелаж*);

2) куплено 1 *call* опціон зі страйком K_1 та 1 *put* - K_2. Розглянути наступні випадки окремо $K_1 = K_2$, $K_1 > K_2$ (*стренгл*), $K_1 < K_2$.

Задачі для самостійної роботи

1. Європейський *call* опціон на акцію зі страйковою ціною 100 у.о. і терміном реалізації через 3 місяці коштує 5 у.о. Купівля опціону фінансується кредитом під 10%, що нараховуються неперервно. Ринкова ціна акції (у момент реалізації) 1) підвищилась до 120 у.о., 2) знизилась до 95 у.о. Обчисліть виграш власника такого опціону.

2. Інвестор займає, відповідно, довгу та коротку позиції в європейських *call* і *put* опціонах на одні і ті ж активи зі страйковими цінами X_1 та X_2. Знайти виграш інвестора, якщо дати виконання опціонів співпадають, а ціни активів на момент виконання опціонів дорівнюють S_T.

3. Інвестор планує через 8 місяців купити акцію із поточною вартістю $80\$$. Через 4 місяці обіцяють виплатити дивіденди по акції у розмірі $2\$$. Поточна вартість 8-ми місячного європейського *call* опціону на акцію із ціною виконання

80$ дорівнює 2$, а безризикова відсоткова ставка при неперервному нарахуванні відсотків складає 6%. Оцінити прибуток від хеджування початкової позиції, якщо ціна на акцію через 8 місяців буде а) 78$, б) 88$.

4. Задано 10-тимісячний європейський *call* опціон на акцію, по якій через 4 і 8 місяців очікуються дивіденди 2$ і 3$, відповідно. Ціна виконання 96,9$. Початкова ціна акції складає 100$, а безризикові відсоткові ставки на 4, 8 і 10 місяців при неперервному нарахуванні складають 6, 6,5 і 7 %, відповідно. Вказати прибуткову арбітражну стратегію і величину прибутку, якщо ціна вказаного опціону 3$.

5. Нехай S_t - вартість акції в момент часу $t \geq 0$, K - страйкова ціна, відсотки нараховуються неперервно зі ставкою r. Знайти капітал інвестора у момент T, який у момент t

а) має 2 *call* опціони і продає 1 акцію; б) має 1 акцію і продає 1 *call* опціон.

6. Побудувати графіки виплат (від ціни акції S) за наступними цінними паперами;

1) куплено 1 *call* опціон і 1 *put* опціон, у всіх страйкова ціна K;

2) куплено 1 *put* опціон та 2 *call* опціони зі страйковою ціною K.

Відповіді

Аудиторні задачі: ***1.*** $S_T > 239,67$ *пенсів.* ***2.*** $S_T = 28,36\,\$$. ***4.*** *а)* $2,8\,\$$; *б)* $-9,2\,\$$. ***5.*** *Арбітражна стратегія: купівля call опціону за* $1,8\,\$$, *купівля акції за* $48\,\$$, *кредит на* $49,8\,\$$ *на 6 міс. Прибуток* $0,25\,\$$. ***6.*** *а)* $\left|K - S_T\right|$, б) $(S_T - K_1)_+ + P_p e^{r(T-t)} - (K_2 - S_T)_+$.

Задачі для самостійної роботи*:** ***1. *1) 14,87 у.о.; 2) -5,13 у.о..* ***3.*** *а)* $1,14\,\$$; *б)* $-0,86\,\$$. ***4.*** *Арбітражна стратегія: купівля call опціону за* $3\,\$$, *продаж акції за* $100\,\$$, $97\,\$$ *відати в кредит на 10 місяців. Прибуток* $0,803\,\$$. ***5.*** *а)* $2(S_T - K)_+ + S_t e^{r(T-t)}$; *б)* $S_T + P_c e^{r(T-t)} - (S_T - K)_+$

Контрольні питання до розділу 2

1. Поясніть поняття облігація. Які її основні характеристики?

2. Чому облігацію називають безризиковим активом?

3. Поясніть поняття облігація з нульовим купоном.

4. Що таке облігація з купоном? Наведіть приклад.

5. За яким правилом обчислюється внутрішня дохідність облігації?

6. Чому дорівнює ціна облігації з купоном С з терміном погашення через T років, якщо діє ставка r складних періодичних відсотків?

7. Поясніть схему інвестування в облігації з нульовим купоном. Скільки виплат передбачає така облігація?

8. Що таке акція? Які бувають їх види?

9. Що виражає коефіцієнт повернення? Як пов'язані між собою коефіцієнт повернення та ціна акції?

10. Які властивості має коефіцієнт повернення?

11. Чому акції належать до ризикових фінансових активів?

12. Поясніть поняття опціон.

13. Що таке *call* опціон, *put* опціон? Які основні їх параметри?

14. Які зобов'язання має власник опціону (інвестор)?

15. Запишіть величину виплати для європейського *put* опціону.

Тестові завдання до розділу 2

1. *Якщо номінал річної облігації дорівнює 1000 грн. та вона продається за 950 грн., то її відсоткова ставка дорівнює*

А	Б	В	Г
5,3%	*5%*	*9,5%*	*1,5% грн*

2. *Прибуток за облігаціями деякого товариства з обмеженою відповідальністю номіналом 10000 грн. виплачується два рази на рік при 45% річних. Визначити суму прибутку при кожній виплаті.*

А	Б	В	Г
4500 грн	*2250 грн*	*9000 грн*	*6750 грн*

3. *Номінал облігації з нульовим купоном складає 2500 грн, ціна облігації – 400 грн. Реалізація наступає через 4 роки. Визначити дохідність облігації.*

А	Б	В	Г
64 %	*58 %*	*56%*	*1,5 %*

4. *Закінчіть твердження: ціна облігації з купоном…*

А	Б	В	Г
тим вища, чим вища відсоткова ставка	*тим вища, чим нижча відсоткова ставка*	не залежить від відсоткової ставки	збільшується із збільшенням часу

5. *Ціна акції на добу може зрости на 1 позицію з імовірністю 50%, знизитися на 1 позицію з імовірністю 30% і залишитися незмінною з імовірністю 20%. Знайдіть ймовірність того, що через 5 днів курс торгівлі зросте на 2 позиції.*

А	Б	В	Г
0,11	*0,21*	*0,5*	*0,17*

6. *Дві акції А та В випускаються однією галуззю. Імовірність того, що акція А зросте завтра в ціні, дорівнює 0,2. Імовірність того, що обидві акції (А і В) зростуть у ціні завтра, дорівнює 0,12. Відомо, що ціна акції А завтра підніметься. Чому дорівнюватиме ймовірність того, що і акція В завтра підніметься в ціні?*

А	Б	В	Г
0,6	*0,4*	*0,5*	*1*

7. *Випадкові коливання цін акцій двох компаній за день мають дисперсії* $\operatorname{var}\xi = 1$ *і* $\operatorname{var}\eta = 2$*, а коефіцієнт їх кореляції* ρ *= 0,7. Знайти дисперсію коливання ціни портфеля з 5 акцій першої компанії і 3 акцій другої компанії.*

А	Б	В	Г
72,7	68,3	36,4	69, 5

8. *Закінчіть твердження: коефіцієнт повернення для акції …*

А	Б	В	Г
адитивний, але лише за додаткових умов	*завжди адитивний*	*не має властивості адитивності*	*адитивний лише при бумі або стагнації*

9. *Ціна акції у початковий момент рівна* $S_0 = 200$ *грн. Інвестор має можливість вкладати капітал у безризикові активи із відсотковою ставкою* 8%*. Страйкова ціна акції −* 100 *грн. Опціон реалізується через 6 років. Знайти арбітражну ціну опціону.*

А	Б	В	Г
138 грн.	*199 грн.*	*238 грн.*	*99 грн.*

10. *Закінчіть твердження: опціон європейського зразка …*

А	Б	В	Г
випускається лише у Європі	*має фіксований прибуток у момент реалізації*	*реалізується лише у Європі*	*має фіксований час реалізації*

РОЗДІЛ 3.

Модель фінансового ринку з дискретним часом

Майбутні ціни будь-якого активу є певною мірою непередбачуваними. У цьому розділі ми будемо мати справу із звичайними акціями, хоча іноземну валюту, товар або навіть частково непередбачуваний грошовий потік теж можна розглядати. Ринкові ціни залежать від вибору та рішень, що приймаються великою кількістю агентів, що діють в умовах невизначеності. Тому доцільно розглядати ціни активів як випадкові. Проте, можна сказати трохи більше в цілком загальній ситуації. Тому ми будемо накладати конкретні умови на ціни активів, щоб математична модель була реалістичною з одного боку, і сприйнятливою – з іншого.

Очевидно, що моделі фінансового ринку з одним періодом не є реалістичною демонстрацією складного, змінного з часом, непередбачуваного процесу ціноутворення акцій. Але вони мають переваги математичної простоти, оскільки здатні проілюструвати багато важливих економічних принципів, пов’язаних із більш складними, неперервними моделями.

Важливою характеристикою фінансового ринку є поняття арбітражної можливості. Арбітражна стратегія передбачає отримання безризикового ненульового доходу за нульового початкового капіталу. Зрозуміло, що моделі, для яких існують арбітражні стратегії, не можуть бути стійкими з точки зору економіки. Тому правильна теоретична модель не повинна допускати наявність арбітражу.

3.1 Модель ринку цінних паперів з одним періодом

Розглянемо найпростішу модель функціонування ринку цінних паперів, яка називається ***модель з одним періодом (модель з одною торговою сесією).***

I. Основні складові моделі.

M1) Існує лише 2 моменти часу: початковий момент $t=0$ і кінцевий момент $t=1$, $\Im=\{0,1\}$.

M2) Кількість сценаріїв зміни цін цінних паперів скінченна і дорівнює k: $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_k\}$. Кожне $\omega_i\in\Omega$ інтерпретується як стан ринку цінних паперів в момент часу $t=1$, який невідомий інвестору у момент часу $t=0$ і стає відомим у $t=1$.

M3) На Ω задана ймовірнісна міра $P(\omega_i)>0, \forall\omega_i\in\Omega$ та $\sum_{i=1}^{k}P(\omega_i)=1$. Кожне число $P(\omega_i), \forall\omega_i\in\Omega$ означає ймовірність здійснення відповідного сценарію.

M4) Безризиковий актив $B_t, t\in\Im$ (банківський рахунок, облігація): $B_0=1$, $B_1=B_1(\omega)\geq 1$, $\forall\omega\in\Omega$. Зміну $B_1-1=r$ називають ***відсотковою ставкою.*** Для багатьох випадків B_1 вважається не випадковою. Крім того, ми вважаємо, що інвестору доступні будь-які розміри депозиту та кредиту.

M5) Ризиковий актив: вартості $N<\infty$ акцій в момент часу $t\in\Im$: $S_t=(S_1(t),\ldots,S_N(t))$. S_0 – відомі ціни акцій у момент $t=0$, $S_n(1)$ – невідомі інвестору у момент $t=0$ і стають відомим у $t=1$. Тому ціни у $t=1$ залежать від сценарію: $S_n(1)=S_n(1)(\omega)$.

M₆) Ми вважаємо, що інвестор може купити або продати будь-яку кількість акцій, навіть дробову.

II. Головні характеристики моделі. ***Стратегія (портфель)*** інвестора – вектор

$$H = (H_0, H_1, ..., H_N),$$

H_0 – кількість у.о. на рахунку (інвестиції у безризиковий актив), $H_n, n = 1, ..., N$ – кількість n-ї акції. Складові вектора H можуть бути додатними і від'ємними числами: якщо $H_n < 0$, інвестор продає H_n акцій n-го типу; $H_0 < 0$ означає кредит в банку, а $H_0 > 0$ – депозит.

Розмір (ціна, вартість) портфеля інвестора – число

$$V_t = H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t), \ t \in \Im.$$

Ціна портфеля залежить від обраної стратегії. Зауважимо, що V_1 є випадковою величиною і тому $V_1 = V_1(\omega_i), \ \omega_i \in \Omega.$

Дохід інвестора – випадкова величина

$$G = V_1 - V_0 = H_0 r + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n,$$

де $\Delta S_n = S_n(1) - S_n(0)$. Зауважимо, що дохід може бути від'ємним (у цьому випадку говорять про збиток).

Іноді зручно нормувати розмір портфеля, щоб банківський рахунок був сталим. Тому розглядають ***нормовані характеристики моделі***

$$S_n^*(t) = \frac{S_n(t)}{B_t}, \ t \in \Im, \ n \in N - \textit{нормовані ціни акцій},$$

$$V_t^* = \frac{V_t}{B_t} = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t), \ t \in \Im - \textit{нормований розмір портфеля},$$

$$G^* = V_1^* - V_0^* = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^* - \textit{нормований дохід}, \text{ де } \Delta S_n^* = S_n^*(1) - S_n^*(0).$$

ІІІ. Домінантна стратегія та цінова міра. Закон однієї ціни. Стратегія $\hat{H}$ називається ***домінантною,*** якщо

$$\exists \tilde{H} : \hat{V}_0 = \tilde{V}_0, \text{ але } \hat{V}_1(\omega) > \tilde{V}_1(\omega), \ \forall \omega \in \Omega..$$

Якщо існує домінантна стратегія, то існують два портфелі, які мають однакову ціну в момент $t = 0$, але різні розміри в момент $t = 1$.

Пошук домінантної стратегії спрощується, якщо використовувати наступний результат.

Твердження 1. *Домінантна стратегія існує* $\Leftrightarrow \ \exists H : V_0 = 0, V_1(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega..$.

Твердження 1 показує, що існування домінантної стратегії свідчить про економічну неспроможність моделі, оскільки в цьому випадку можна отримати гарантований додатний дохід, починаючи з нульового портфеля.

Твердження 2. *Домінантна стратегія існує* $\Leftrightarrow \ \exists H : V_0 < 0, V_1(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega..$.

Твердження 2 показує іншу суперечливість моделі за наявності домінантної стратегії: початкова ціна від'ємна, але кінцева ціна портфеля невід'ємна для всіх $\omega \in \Omega$.

Зазначені суперечливості моделі відсутні, якщо існує цінова міра.

Вектор $\pi = (\pi(\omega_1), \ldots, \pi(\omega_k))$ називається ***ціновою мірою***, якщо його координати $\pi_i = \pi(\omega_i) \geq 0, \forall i = \overline{1,k}, \sum \pi_i = 1$ та

$$V_0^* = E_\pi V_1^*(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i V_1^*(\omega_i)$$

для довільної стратегії H.

Теорема 1. Цінова міра існує тоді і лише тоді, коли не існує домінантної стратегії.

Для пошуку цінової міри зручно користуватись наступним твердженням.

Твердження 3. *Міра π - цінова $\Leftrightarrow$ коли π - ймовірнісна міра на Ω, для якої*

$$S_n^*(0) = E_\pi S_n^*(1) = \sum_{i=1}^{k} \pi_i S_n^*(1, \omega_i),\ n = 1, \dots, N.$$

Для моделі ринку цінних паперів виконується ***закон однієї ціни (ЗОЦ)***, якщо не існує двох різних стратегій $\hat{H}$ та $\tilde{H}$ таких, що

$$\hat{V}_1(\omega) = \tilde{V}_1(\omega), \forall \omega \in \Omega, \text{ але } \hat{V}_0 \neq \tilde{V}_0.$$

Тобто не існує двох різних портфелей, які в момент $t = 1$ мають однакові вартості при будь-яких сценаріях, але їх вартості в момент $t = 0$ відрізняються.

Твердження 4. *Якщо не існує домінантної стратегії, то виконується ЗОЦ. Обернене твердження не завжди правильне.*

Приклади.

1. Нехай $k = 2,\ r = \dfrac{1}{9}$, ціни на акції задані у таблиці 3.1.1.

Таблиця 3.1.1

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$	
		ω_1	ω_2
1	2	12	24
2	5	7	15

Покажіть, що існує домінантна стратегія. Що можна сказати про цінову міру для такої моделі?

Розв'язання. Переконаємось в існуванні домінантної стратегії. Згідно твердження 1 домінантна стратегія $H = (H_0, H_1, H_2)$ існує, якщо

$$\begin{cases} V_0 = H_0 + 2H_1 + 5H_2 = 0, \\ V_1(\omega_1) = H_0 + 12H_1 + 7H_2 > 0, \\ V_1(\omega_2) = H_0 + 24H_1 + 15H_2 > 0. \end{cases}$$

З 1 рівняння $H_0 = -2H_1 - 5H_2$. Тому отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} H_1 > -\dfrac{1}{5}H_2, \\ H_1 > -\dfrac{5}{11}H_2. \end{cases}$$

Одним з розв'язків цієї системи є пара $H_1 = 1, H_2 = -1$ (встановлено графічно). Тоді $H_0 = -2H_1 - 5H_2 = 3$. Відповідна стратегія $H = (3,1,-1)$ є домінантною.

Згідно теореми 1 цінова міра не буде існувати. Покажемо це. За означенням $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ - цінова міра, якщо $\pi_1, \pi_2 \geq 0$, $\sum \pi_i = 1$ та

$$V_0^* = H_0 + 2H_1 + 5H_2 = \pi_1 \frac{9}{10}\left(H_0 + 12H_1 + 7H_2\right) + \pi_2 \frac{9}{10}\left(H_0 + 24H_1 + 15H_2\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти при

$$\begin{cases} H_0 : \dfrac{9}{10}\pi_1 + \dfrac{9}{10}\pi_2 = 1 \\ H_1 : \dfrac{54}{5}\pi_1 + \dfrac{108}{5}\pi_2 = 2 \\ H_2 : \dfrac{63}{10}\pi_1 + \dfrac{27}{2}\pi_2 = 5 \end{cases}.$$

Утворена система не має розв'язків. Отже, цінової міри не існує.

2. Нехай $B_0 = 1, B_1 = 2, S(0) = 5, S(1,\omega_1) = 12, S(1,\omega_2) = 8$. Знайти цінову міру. Показати, що ЗОЦ виконується двома способами: 1) за допомогою домінантної стратегії; 2) за означенням ЗОЦ.

Розв'язання. Спочатку знайдемо цінову міру. За означенням

$$V_0^* = H_0 + 5H_1 = \pi_1\left(\frac{2H_0 + 12H_1}{2}\right) + \pi_2\left(\frac{2H_0 + 8H_1}{2}\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти при

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 + \pi_2 = 1 \\ H_1 : 6\pi_1 + 4\pi_2 = 5 \end{cases}.$$

Тоді $\pi_2 = \frac{1}{2}, \pi_1 = \frac{1}{2}.$ - цінова міра.

Отже

$$\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Згідно теореми 1 домінантної стратегії не існує. Тоді за твердженням 4 виконується ЗОЦ (1) - за домінантною стратегією).

2) $\begin{cases} V_0 = H_0 + 5H_1, \\ V_1(\omega_1) = 2H_0 + 12H_1, \\ V_1(\omega_2) = 2H_0 + 8H_1. \end{cases}$

Зафіксуємо $V_1(\omega_1) = a_1, V_1(\omega_2) = a_2$. Тоді система

$$\begin{cases} a_1 = 2H_0 + 12H_1, \\ a_2 = 2H_0 + 8H_1, \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $H_1 = \frac{a_1 - a_2}{4}, H_0 = \frac{3a_2 - 2a_1}{2}$. Тоді V_0 визначається єдиним чином, що і означає що ЗОЦ виконується.

Аудиторні задачі.

1. Нехай $k = 3, r = 1/9,$ ціни акцій задані в таблиці 3.1.2

Таблиця 3.1.2

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	20/3	20/3	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

Знайти $S_n^*(0), S_n^*(1,\omega_i), \ i=1,2,3,$ виразити величини V_1, G, V_1^*, G^* через стратегію $H=(H_0,H_1,H_2)$ для $\omega_1,\omega_2,\omega_3.$

2. Нехай $k=2, \ r=1,$ ціни акцій задані в таблиці 3.1.3. Встановити чи існують домінантна стратегія, цінова міра. Якщо характеристика існує, вказати її. Якщо характеристика не існує, обґрунтувати це.

Таблиця 3.1.3

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$	
		ω_1	ω_2
1	3	4	3
2	5	2	3

3. Нехай $k=3, \ r=0, N=2,$ ціни акцій задані в таблиці 3.1.4.

Таблиця 3.1.4

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	4	8	6	3
2	7	10	8	4

Побудувати домінантну стратегію, яка задовольняє твердження 2 розділу 3.

4. Нехай $k=3, \ r=0, N=2,$ ціни акцій задані в таблиці 3.1.5.

Таблиця 3.1.5

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	2	2	1	7
2	4	3	6	15

Знайти цінову міру користуючись твердженням 3 розділу 3. Які висновки можна зробити про таку модель ринку?

5. Нехай $k=2, \ r=1, N=1, S(0)=5, S(1,\omega_1)=S(1,\omega_2)=14.$ Показати, що ЗОЦ не виконується.

6. Нехай $B_0=1, \ B_1=2, \ S(0)=5, S(1,\omega_1)=13, \ S(1,\omega_2)=9.$ Знайти цінову міру. Показати, що ЗОЦ виконується двома способами: 1) за допомогою домінантної стратегії; 2) за означенням ЗОЦ.

7. Нехай $r=1,\ N=1,\ S(0)=2,\ S(1,\omega_1)=5,\ S(1,\omega_2)=8.$ Показати, що ЗОЦ виконується, але існує домінантна стратегія.

Задачі для самостійної роботи

1. Показати, що $V_1=V_0+G,\ V_1^*=V_0^*+G^*$. (використати означення розміру портфеля).

2. Нехай $k=3,\ r=1/9,$ ціни акцій задані в таблиці 3.1.6.

Таблиця 3.1.6

$S(0)$	$S(1)$		
	ω_1	ω_2	ω_3
5	20/3	40/9	10/3

1) Знайти $B(1),\ S^*(0),\ S^*(1,\omega_i), i=1,2,3,$ виразити величини $V_0,V_1,G,V_0^*,V_1^*,G^*$ через стратегію $H=(H_0,H_1,H_2)$ для $\omega_1,\omega_2,\omega_3$.

2) Переконатись в тому, що цінова міра існує (Теорема 1). Знайти цінову міру.

3. Нехай $r=1,\ S(0)=10,\ S(1,\omega_1)=12,\ S(1,\omega_2)=8.$ Побудувати домінантну стратегію двома способами: 1) користуючись твердженням 1; 2) користуючись твердженням 2 розділу 3.

4. Побудувати модель ринку, для якого виконується ЗОЦ, але існує домінантна стратегія.

5. Перевірити виконання ЗОЦ в умовах №3 аудиторних задач.

Відповіді

Аудиторні задачі: ***2.*** *$H=(2,1,-1)$, цінової міри не існує.* ***3.*** *$H=(5,2,-2)$.* ***4.*** $\pi=\left(\frac{7}{9},\frac{5}{27},\frac{1}{27}\right)$, *домінантної стратегії не існує, виконується ЗОЦ.* ***5.*** $\tilde{H}=(0,1),\ \hat{H}=(7,0)$. ***6.*** $\pi=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$. ***7.*** $H=(-2,1)$.

Задачі для самостійної роботи: 2. *2) показати, що домінантної стратегіїї не існує (за тв.1).* $\pi = \left(\frac{7}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$. **3.** *1)* $H = (10, -1)$; *2)* $H = (5, -2/3)$. **5.** *ЗОЦ виконується.*

3.2 Арбітражні стратегії

Існування домінантної стратегії є негативною характеристикою будь-якої моделі фінансового ринку. Розглянемо наступну небажану, але в меншій мірі за попередню, характеристику таких моделей .

Арбітражна стратегія – можливість на фінансовому ринку при нульовому портфелі безризиково отримати ненульовий дохід. При чому додатній дохід отримується із додатною ймовірністю.

Стратегія H називається ***арбітражною***, якщо виконуються умови

AS1) $V_0 = 0,$

AS2) $V_1 \geq 0, \forall \omega \in \Omega,$

AS3) $E[V_1] > 0$.

Із умов **AS2** - **AS3** $\Rightarrow$ $\exists \omega_0 : V_1(\omega_0) > 0$.

Моделі, для яких існують арбітражні стратегії, не можуть бути стійкими з економічної точки зору. Тому хороша теоретична модель не має допускати арбітраж. Одним із прикладів ринків, на яких не можна заробити капітал без початкового (ринок без арбітражу), слугує ринок, на якому пропонуються лише безризикові фінансові активи. У цьому випадку вважаємо, що $N = 0$ і портфель інвестора змінюється за правилом $V_t = H_0 B_t$. Тому з умови $V_0 = 0$ випливає, що $H_0 = 0$ і $V_1(\omega) = 0, \forall \omega \in \Omega.$.

Твердження 1. *Якщо існує домінантна стратегія, то існує арбітраж. Обернене твердження не завжди правильне.*

Умови **AS1** - **AS3** можна переписати в термінах нормованого портфеля:

AS₁*. $V_0^* = 0,$

AS₂*. $V_1^* \geq 0,\ \forall \omega \in \Omega,$

AS₃*. $E[V_1^*] > 0$.

Інший критерій існування арбітражної стратегії можна виразити в термінах нормованого доходу:

Твердження 2. *Арбітражна стратегія існує* $\Leftrightarrow$ *існує стратегія* H *, для якої*

1) $G^*(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega,$

2) $E[G^*] > 0.$

Ймовірнісна міра Q на Ω називається ***нейтральною*** або ***нейтральною до ризику***, якщо

NM₁) $Q(\omega) > 0,\ \forall \omega \in \Omega,$

NM₂) $E_Q[\Delta S_n^*] = 0, \forall n = 1, 2, ..., N.$

Умова **NM₂** означає, що "середня" зміна цін на кожну акцію є нульовою по відношенню до міри Q. Іншими словами, якщо числа $Q(\omega) > 0$ були б ймовірностями сценаріїв $\omega \in \Omega$, то ціни акцій "в середньому" не змінились би, тобто ризик був би зведений "в середньому" до нуля.

Умова **NM₂** означає, що

$$S_n^*(0) = E_Q[S_n^*(1)],\ n = 1, ..., N.$$

Остання рівність співпадає із означенням цінової міри. Але відмінність між ними є: $Q(\omega) > 0,\ \forall \omega \in \Omega,$

Теорема 1. Арбітражна стратегія не існує $\Leftrightarrow$ ***існує нейтральна міра.***

Заважимо, що серед моделей фінансового ринку існують такі, для яких існує єдина нейтральна міра, існує нескінченно багато нейтральних мір та не існує жодної нейтральної міри.

Приклади.

1. Нехай $k=2,\ N=1,\ r=0$ та ціни на акцію $S(0)=10,\ S(1,\omega_1)=12,\ S(1,\omega_2)=10.$ Показати, що існує арбітражна стратегія, але не існує домінантної стратегії.

Розв'язання. За означенням арбітражної можливості

$$\begin{cases} V_0 = H_0 + 10H_1 = 0 \\ V_1(\omega_1) = H_0 + 12H_1 \geq 0 \\ V_1(\omega_2) = H_0 + 10H_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 + 10H_1 = 0 \\ H_0 + 12H_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 + 10H_1 = 0 \\ H_1 \geq 0 \end{cases}$$

Із умови **AS3** означення арбітражної стратегії випливає, що нерівність в останній системі строга. Тому стратегія $H=(-10,1)$ - арбітражна, причому для неї $V_0=0$, $V_1(\omega_1)=2$, $V_1(\omega_2)=0$.

Відсутність домінантної стратегії доведемо за допомогою цінової міри. Згідно з теоремою: Цінова міра існує $\Leftrightarrow$ не існує домінантної стратегії. Рівність із означення цінової міри має вигляд

$$V_0 = \pi_1 V_1(\omega_1) + \pi_2 V_1(\omega_2) \Leftrightarrow 0 = \pi_1 \cdot 2 + \pi_2 \cdot 0.$$

Міра $\pi=(0,1)$ задовольняє останню умову, тому є ціновою. Отже, домінантної стратегії не існує.

2. Нехай $k=2,\ N=1,\ r=\frac{1}{9}$ та ціни на акцію $S(0)=7,\ S(1,\omega_1)=\frac{40}{3},\ S(1,\omega_2)=\frac{50}{9}.$ Встановити, чи має модель нейтральну міру.

Розв'язання. Запишемо нормовані характеристики моделі

$$S^*(0)=7\ \ S^*(1,\omega_1)=12,\ \ S^*(1,\omega_2)=5.$$

Згідно означення нейтральна міра має задовольняти умови

$$\begin{cases} Q_1 > 0, Q_2 > 0, \\ Q_1 + Q_2 = 1, \\ 12Q_1 + 5Q_2 = 7. \end{cases}$$

Єдиним розв'язком системи є вектор $Q = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$. Отже, нейтральна міра існує і єдина. Згідно теореми 1 арбітражної можливості модель не має.

3. Нехай $k = 3,\ N = 2,\ r = \frac{1}{9}$ та ціни на акції задані в таблиці 3.2.1

Таблиця 3.2.1

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	60/9	60/3	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

Показати, що не існує нейтральної міри. Зробити висновки.

Розв'язання. Запишемо нормовані характеристики моделі

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	6	6	4
2	10	12	8	8

Нейтральна міра визначається із наступної системи

$$\begin{cases} Q_1 > 0,\ Q_2 > 0,\ Q_3 > 0, \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1, \\ 6Q_1 + 6Q_2 + 4Q_3 = 5, \\ 12Q_1 + 8Q_2 + 8Q_3 = 10. \end{cases}$$

Система має єдиний розв'язок

$$Q=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

Така міра Q є ціновою, але не нейтральною. Тому за теоремою 1 існує арбітражна можливість. З іншого боку, Q - цінова міра, тому домінантної стратегії не існує.

Аудиторні задачі.

1. Нехай $k=3,\ r=1/9,$ ціни акцій задано у таблиці 3.2.2

Таблиця 3.2.2

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	20/3	20/3	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

Показати, що є арбітражна можливість, але домінантної стратегії не існує.

2. Довести, що у моделі не існує арбітражної стратегії, якщо $k=2,\ r=1/7.$

Таблиця 3.2.3

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$	
		ω_1	ω_2
1	6	64/7	24/7
2	4	48/7	8/7

3. Нехай $k=3,\ r=1/9.$ Встановити, чи має модель нейтральну міру.

Таблиця 3.2.4

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	60/9	60/9	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

4. Нехай $k=4,\ r=\frac{1}{9},N=2,$ ціни акцій задані в таблиці 3.2.5

Таблиця 3.2.5

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	5	20/3	20/3	40/9	20/9
2	10	40/3	80/9	80/9	40/3

Визначити або всі нейтральні міри, або арбітражні стратегії.

5. Позначимо через $W = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^k : \vec{x} = G^* \text{ для деякої } H \right\}$, $A = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^k : \vec{x} \geq 0, \vec{x} \neq 0 \right\}$, $\vec{x} \geq 0$ якщо $x_i \geq 0, i = 1,...,k.$ Довести, що $W \cap A = \varnothing \Leftrightarrow$ не існує арбітражної стратегії. Знайти арбітражні стратегії у задачі №4.

6. Позначимо $W^{\perp} = \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^k : \vec{y} \cdot \vec{x} = 0, \forall\, \vec{x} \in W \}$. Показати, що якщо $Q = (Q_1,...,Q_k)$ – нейтральна міра, то $Q \in W^{\perp}$.

7. Знайти $W^{\perp}$ для задачі №4.

Задачі для самостійної роботи

1. Нехай $r = 1/5$, ціни акцій задані в таблиці 3.2.6

Таблиця 3.2.6

n	$S_n(0)$	$S_n(1)$	
		ω_1	ω_2
1	7	12/5	18/5
2	8	24/5	12/5

Встановити, чи має модель нейтральну міру, арбітражну стратегію.

2. Довести, що W, $W^{\perp}$- лінійні підпростори $\mathbb{R}^k$.

3. Записати W і $W^{\perp}$ за умов №2 аудиторних задач.

4. Ціни на акцію задано в таблиці 3.2.7.

Таблиця 3.2.7

$S^*(0)$	$S^*(1)$		
	ω_1	ω_2	ω_3
7	8	2	5

Знайти всі ризик нейтральні міри, арбітражні стратегії для моделі.

5. Записати множини W і $W^{\perp}$ для моделі із попередньої задачі.

Відповіді

Аудиторні задачі: 1. $H=(0,2,-1)$ *- арбітражна стратегія;* $\pi=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ *- цінова міра* $\Rightarrow$ *домінантної стратегії не існує.* ***2.*** $Q=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$ *- нейтральна міра.* ***3.*** *Нейтральної міри не існує.* ***4.*** $Q=\left(\frac{1-a}{2},a,\frac{1-2a}{2},\frac{a}{2}\right)$ *- нейтральна міра для* $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ***5.*** $W=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_3=0,\ x_1+2x_2+x_4=0\}$. *Арбітражу не існує.* ***7.*** $W^{\perp}=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^4 : y_2-2y_4=0,\ 2y_1-y_2-2y_3=0\}$.

Задачі для самостійної роботи*:** ***1. *Спочатку намагаємось знайти нейтральну міру за означенням, але* $Q_2=-2<0\Rightarrow$ *не існує нейтральної міри. За т.1 існує арбітражна стратегія* $H=(13,-3,1)$, *визначена графічним методом.* ***3.*** $W=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 : 3x_1+2x_2=0\}$, $W^{\perp}=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^2 : y_2-\frac{2}{3}y_1=0\}$. ***4.*** $Q=\left(\frac{2}{3}+\alpha,\alpha,\frac{1}{3}-2\alpha\right)$ *– нейтральна міра для* $\alpha\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$. *Арбітражу немає* ***5.*** $W=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : 7x_1+2x_2+x_3=0\}$, $W^{\perp}=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^3 : y_1-7y_2=0, y_3-y_2=0\}$.

3.3 Модель Марковиця

I. Коефіцієнт прибутку. Нехай I_0 деяке інвестування у момент часу $t=0$. Це може бути депозит у банку, купівля акцій, тощо. Коефіцієнтом дохідності у момент часу $t=1$ називається

$$R=\frac{I_1-I_0}{I_0},$$

де I_1 - це капітал, який отримують від інвестування в момент часу $t=1$.

Якщо інвестиція є депозитом суми у банку, то

$$R = \frac{(1+r)I_0 - I_0}{I_0} = r,$$

де r – відсоткова ставка банку.

Якщо $S(t)$ – ціна акції в момент t , то

$$R = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}.$$

Оскільки $S(1)$ є випадковою величиною, то і R є випадковою величиною також, тому можна говорити про математичне сподівання та дисперсію.

Означення 1. Середнім прибутком або очікуваним прибутком називається

$$E[R].$$

Якщо було проведено декілька інвестицій, то вони складають портфель інвестора.

Нехай інвестор має N активів, то величина портфелю інвестора у момент часу t дорівнює

$$V_t = \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t).$$

Тут $S_1(0), \ldots, S_N(0)$ початкові вартості акцій $H_1, \ldots, H_N$.

Вагою активу у портфелі інвестора називається

$$w_n = \frac{H_n S_n(0)}{V_0},$$

де

$$V_0 = \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0).$$

Дохідність портфелю дорівнює зваженій сумі прибутку його активів, до того ж ваговими коефіцієнтами у цій сумі є ваги активів у портфелі. Тому

$$R = \sum_{n=1}^{N} \omega_n R_n.$$

А середній прибуток дорівнює:

$$E[R] = \sum_{n=1}^{N} \omega_n E[R_n].$$

Якщо у портфелі інвестора присутній ще й банківський депозит, то

$$E[R] = r + \sum_{n=1}^{N} \omega_n E[R_n].$$

II. Ризик. В економічній теорії ризиками вважають довільні відхилення від наміченого плану, навіть якщо вони ідуть на користь інвестору.

Означення 2. Ризиком інвестиції, що має коефіцієнт прибутку R, називається

$$\operatorname{var}[R].$$

Ризик портфеля інвестора

$$\operatorname{var}[R] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \operatorname{cov}[R_i R_j],$$

або

$$\operatorname{var}[R] = \sum_{i=1}^{N} \omega^2 \operatorname{var}[R_i] + \sum_{i \neq j}^{N} \omega_i \omega_j \operatorname{cov}[R_i R_j].$$

Перший доданок – це вагова сума ризиків активів, а другий – зважена сума коваріацій між активами.

III. Ризик для моделі Марковиця. Нехай портфель складається з двох ризикових активів та відсутні інвестиції в облігації. У цьому випадку ми говоримо про моделі Марковиця. Середні коефіцієнти прибутку та ризики позначимо через μ_i і σ_i^2 для $i = 1,2$. Позначимо вагу першого активу через $1 - s$, а другого через s, тоді середній прибуток портфелю буде дорівнювати

$$\mu = (1 - s)\mu_1 + s\mu_2,$$

а його ризик

$$\sigma^2 = (1 - s)^2\sigma_1^2 + s^2\sigma_2^2 + 2s(1 - s)\rho\sigma_1\sigma_2,$$

де

$$\rho = cor[R_1, R_2] = \frac{\operatorname{cov}[R_1, R_2]}{\sqrt{\operatorname{var}[R_1]\operatorname{var}[R_2]}}.$$

У випадку некорельованих активів $\rho = 0$, отримуємо

$$\sigma^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)s^2 - 2\sigma_1^2 s + \sigma_1^2 = g(s).$$

Тоді мінімальне значення ризику дорівнює

$$\sigma_{\min}^2 = \min_s g(s) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Зауважимо, що $0 < \sigma_{\min}^2 = \min_s\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$. Це означає, що існує стратегія, для якої ризик є меншим ніж ризик кожного активу. У частинному випадку, якщо $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то ризик такої стратегії у двічі менший, ніж ризик кожного з активів. Стратегія з мінімальним ризиком визначається вагами активів

$$s_{\min} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad 1 - s_{\min} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

У випадку абсолютно залежних активів $\rho = 1$ (вважаємо, що $\sigma_1 \neq \sigma_2$) маємо, що

$$\sigma^2 = ((\sigma_2 - \sigma_1)s + \sigma_1)^2.$$

Тому мінімальний ризик дорівнює $\sigma^2_{\min} = 0$, та досягається при

$$s_{\min} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} < 0,\ 1 - s_{\min} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > 0\,.$$

Це означає, що стратегія з мінімальним ризиком передбачає продаж другого активу.

У випадку абсолютно залежних активів $\rho = -1$ (вважаємо, що $\sigma_1 \neq \sigma_2$) маємо, що

$$\sigma^2 = ((\sigma_2 + \sigma_1)s - \sigma_1)^2.$$

Тому мінімальний ризик дорівнює $\sigma^2_{\min} = 0$, та досягається при

$$s_{\min} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} > 0,\ 1 - s_{\min} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} > 0\,.$$

Це означає, що стратегія з мінімальним ризиком передбачає купівлю обох активів.

Приклади.

1. Портфель складається з двох пакетів акцій вартістю 3000 грн. та 2000 грн. Очікуваний прибуток по першому пакету складає 12%, а по другому – 16%. Якою є очікувана дохідність портфеля вцілому?

Розв'язання. Знайдемо вагу першого активу та другого. Для цього скористаємось формулами

$$w_1 = \frac{H_1 S_1(0)}{H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)},\ w_2 = \frac{H_2 S_2(0)}{H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)}.$$

За умовою задачі $S_1(0) = 3000$, $S_2(0) = 2000$, $H_1 = H_2 = 1$, тоді

$$w_1 = \frac{H_1 S_1(0)}{H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)} = \frac{3000}{3000 + 2000} = 0,6;$$
$$w_2 = \frac{H_2 S_2(0)}{H_1 S_1(0) + H_2 S_2(0)} = \frac{2000}{3000 + 2000} = 0,4.$$

Оскільки $E[R_1] = 12\%$ та $E[R_2] = 16\%$, то

$$E[R] = \omega_1 E[R_1] + \omega_2 E[R_2] = 0,6 \cdot 12 + 0,4 \cdot 16 = 13,6.$$

Таким чином, середній прибуток дорівнює: $E[R] = 13,6\%$.

2. У заданий момент часу акції першої та другої компанії коштують 50$ та 20$, а їх очікувані прибутки $\mu_1 = 12\%$ та $\mu_2 = 8\%$. Інвестор хоче придбати ці акції. Він робить внесок у акції кожної компанії у розмірі половини свого капіталу. Визначити середній прибуток портфеля та ризик кожної акції та портфеля вцілому, якщо коваріаційна матриця прибутку буде дорівнювати $\mathrm{cov}(R_1, R_2) = \begin{pmatrix} 0,06250 & 0,00375 \\ 0,00375 & 0,0225 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Середній прибуток портфеля визначається формулою:

$$\mu = (1 - s)\mu_1 + s\mu_2.$$

За умовою $s = 1 - s = 0,5$, тоді

$$\mu = 0,5 \cdot 12 + 0,5 \cdot 8 = 10\%.$$

Ризик акції визначається величиною її дохідності

$$\sigma_1 = \sqrt{0,0625}, \ \ \sigma_2 = \sqrt{0,00225}.$$

Знайдемо ризик портфеля: $\sigma^2 = (1 - s)^2 \sigma_1^2 + s^2 \sigma_2^2 + 2s(1 - s)\,\mathrm{cov}(R_1, R_2)$.

Маємо

$$\sigma^2 = (0,5)^2 0,0625 + (0,5)^2 \cdot 0,0225 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,00375 = 0,023125.$$

Таким чином, ризик дохідності портфелю дорівнює : $\sigma = \sqrt{0,023125} \approx 0,1521$.

Аудиторні задачі

1. Портфель складається з трьох пакетів акцій. Вартість першого − 1000 грн, другого −3500 грн, третього − 5500 грн. Очікувана дохідність за першим пакетом становить 10%, за другим − 15%, за третім − 5%. Якою є очікувана дохідність усього портфеля?

2. На початку року інвестор був власником чотирьох типів цінних паперів у відповідних кількостях та з відповідними очікуваними до кінця року цінами (див. табл. 3.3.1)

Таблиця 3.3.1

Тип акції	Кількість	Теперішня ціна	Очікувана ціна в кінці року
A	100	50	50
B	200	35	40
C	50	25	50
D	100	100	110

Якою є очікувана дохідність цього портфелю за рік?

3. При залученні капіталу до проекту ***A*** в 20 випадках з 200 було отримано прибуток у 25 000 грн., у 80 випадках — 30 000 грн., у 100 випадках — 40 000 грн. При залученні капіталу до проекту ***B*** у 144 випадках з 240 отримано прибуток 30 000 грн., у 72 випадках — 35 000 грн., у 24 випадках — 45 000 грн. Обрати варіант залучення капіталу:

а) за критерієм середнього прибутку; б) за критерієм ризику портфеля інвестора.

4. Інвестор обирає між двома акціями, кожна з яких по-своєму реагує на можливі ринкові ситуації (табл. 3.3.2).

Таблиця 3.3.2

Акція	Ймовірність	Дохідність	Ймовірність	Дохідність
A	0,5	20%	0,5	10%
B	0,99	15,1%	0,01	5,1%

Яку акцію придбає інвестор, якщо він не схильний до ризику?

5. Інвестор вклав 60% свого капіталу в акцію *A,* а все, що залишилось в акцію В. Ризики цих акцій складають відповідно 10 та 20%. Чому дорівнює ризик портфелю, якщо: а) дохідності цих паперів знаходяться у повній прямій кореляції; б) дохідності некорельовані.

6. Портфель складається з двох активів. Частка першого активу становить 40%, другого становить 60%, ризики активів $\sigma_1^2 = 0,0012184$, $\sigma_2^2 = 0,000987$, коефіцієнт кореляції $\rho_{12} = 0,0008765$. Чому дорівнює ризик портфеля?

7. Знайти мінімальне значення ризику портфеля Марковіца, що складається з двох ризикових активів, активи некорельовані, $\sigma_1^2 = 0,04$, $\sigma_2^2 = 0,09$.

8. Том Джонс отримав від бабусі у спадок акції компанії Canon на суму 50 000 \$ та 50 000 \$ готівкою. Але бабуся вимагала не продавати акції протягом одного року, а вкласти їх в один з видів акцій компаній, які представлені у таблиці. Який портфель є найбільш надійним при виконанні умов заповіту?

Таблиця 3.3.3

Компанія	Коефіцієнт кореляції компаній							Стандартне відхилення, %
	Canon	Nokia	Kodak	Samsung	Siemens	Polaroid	Bosh	
Canon	1	0,65	0,45	0,34	0,64	0,4	0,42	28
Nokia		1	0,46	0,48	0,42	0,58	0,31	29
Kodak			1	0,50	0,50	0,41	0,23	25
Samsung				1	0,50	0,42	0,40	29

Siemens					1	0,21	0,37	24
Polaroid						1	0,33	39
Bosh							1	42

***Задачі для самостійної роботи*.**

1.Портфель складається з двох пакетів акцій вартістю 1500 грн. та 2500 грн. Очікуваний прибуток по першому пакету складає 10%, а по другому − 18%. Якою є очікувана дохідність портфеля вцілому?

2.Нехай задано матрицю коваріації трьох активів та вектор очікуваної дохідності.

$$B = \begin{pmatrix} 210 & 60 & 0 \\ 60 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E[R] = \begin{pmatrix} 10{,}1 \\ 7{,}8 \\ 5{,}0 \end{pmatrix}$$

а) який з трьох цінних паперів є безризиковим активом? Чому?

б) чому дорівнює очікувана дохідність, якщо безризиковий актив складає 25% усього портфеля?

3. Нехай А − внесок у ризиковий актив з ймовірністю отримати втрати p_A та дохідністю r_A при його збереженні. Отримайте формули математичного сподівання та ризику випадкової дохідності подібного внеску.

4. У заданий момент часу очікувані прибутки першої та другої компанії становлять $\mu_1 = 10\%$ та $\mu_2 = 4\%.$ Інвестор хоче придбати ці акції. Він робить внесок у акції першої компанії у розмірі 0,25 свого капіталу, а залишок інвестує у акції другої компанії. Визначити середній прибуток портфеля та ризик кожної акції та портфеля вцілому, якщо коваріаційна матриця прибутку буде дорівнювати

$$\operatorname{cov}(R_1, R_2) = \begin{pmatrix} 0{,}0121 & 0{,}00075 \\ 0{,}00075 & 0{,}0169 \end{pmatrix}.$$

5. Припустимо, що на фондовому ринку цінних паперів можуть виникнути лише два варіанти розвитку подій і на кожний з них акції реагують невипадковим чином, як наведено у таблиці 3.3.4.

Таблиця 3.3.4

Акція	Варіант 1		Варіант 2	
	Ймовірність	Дохідність	Ймовірність	Дохідність
A	0,2	5%	0,8	1,25 %
B	0,2	-1%	0,8	2,75%

Визначити: а) очікувані дохідності та ризики цих акцій; б) коефіцієнти кореляції між дохідностями.

6. Інвестор вклав 60% своїх грошей в акції A, а залишок— в акції B. Він оцінює перспективи для себе наступним чином (табл. 3.3.5).

Таблиця 3.3.5

Показник	Акція	
	A	B
Очікувана дохідність, %	15	20
Стандартне відхилення, %	20	22
Коефіцієнт кореляції	0,5	

Визначити:

а) якою є очікувана дохідність та стандартне відхилення портфелю?

б) як змінилася відповідь, якби коефіцієнт кореляції дорівнював 0 або — 0,5?

7. Знайти оптимальний портфель Марковіца з середньою дохідністю першого цінного паперу $\mu_1 = 8\%$, другого $\mu_2 = 10\%$ для двох некорельованих цінних паперів, ризики яких дорівнюють 0,4 та 0,8,за умов, що загальна середня дохідність портфелю становить $\mu = 9\%$

8. Портфель складається з двох активів. Ризики активів становлять $\sigma_1^2 = 0,0009,\ \sigma_2^2 = 0,0049,$ коефіцієнт кореляції $\rho_{12} = 1.$ Чому дорівнює мінімальний ризик портфеля? За яких умов він досягається?

Відповіді

Аудиторні задачі: ***1.*** 81%. ***2.*** $0,1398 \approx 14\%$ ***3.*** *а)* $E[R_A] = 34,5;\ E[R_B] = 33.$ *Вигідніше обрати варіант А. б)* $\mathrm{var}[R_A] = 32,25;\ \mathrm{var}[R_B] = 21.$ *Вигідніше обрати варіант В.* ***4.*** $\sigma_A = 5\%,\ \sigma_B = 0,995\%,\ E[R_A] = E[R_B] = 15\%$. *Інвестор придбає акцію В* ***5***. *а)* 14%, *б)* 10%. ***6.*** $2,35\%$. ***7.*** $2,8\%$. . ***8***. *Половину вартості портфеля складають акції компанії Canon, тоді задача зводиться до знаходження такої акції, для якої двокомпонентний портфель буде мати найменший за усіма можливими варіантами ризик.* $\min\{\sigma^2\} = \min\left\{\frac{1}{4}\cdot 28^2 + \frac{1}{4}\cdot\sigma_i^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\rho_{1i}\cdot 28\cdot\sigma_i\right\}, i = 1,...,7$. *Обрати слід акції компанії Kodak.*

Задачі для самостійної роботи: ***1.*** 15% ***2.*** *Третій цінний папір є безризиковим.* $\sigma\ = 7,7\%,\ E[R\ ] = 7,96 \approx 8\%$ ***3.*** *Ряд розподілу для випадкових відсоткових виплат матиме вигляд*

Відсотки	$r_A A$	$-A$
Ймовірність	$1 - p_A$	p_A

Тоді $\sigma\ = \sqrt{p_A(1-p_A)}(1+r_A);\ E[R\ ] = (1-p_A)r_A - p_A.$ ***4.*** *0,3* ***5.*** *а)* $\sigma_A =\ \sigma_B = 1,5\%,\ E[R_A] = E[R_B] = 2\%$. *б)* $\rho_{AB} = -1.$ ***6.*** *а)* $\sigma_A \approx 18,08\%,\ E[R\ ] = 17\%$ *.б)* $\rho\ = 0,\ \sigma \approx 14,88\%;\ \rho\ = -0,5,\ \sigma \approx 10,76\%$ ***7.*** $\sigma \approx 10,26\%$ ***8.*** $\sigma = 0$, $s_{\min} = -0.75.$

<u>Контрольні питання до розділу 3</u>

1. Перерахуйте характеристики моделі ринку цінних паперів з одним періодом.

2. Що включає в себе стратегія інвестора?

3. Сформулюйте означення цінової міри. Який критерій її існування?

4. Дайте означення домінантної стратегії.

5. Чому банківський рахунок можна вважати незмінним, якщо переходити до нормованого портфелю?

6. Поясніть чому портфель інвестора при $t=0$ є невипадковою величиною, а у момент часу $t=1$ приймає випадкові значення?

7. Що таке арбітраж? Які його характеристики?

8. Наведіть приклад ринку без арбітражу.

9. Як обчислюються вагові коефіцієнти?

10. Що називається ризиком в економічній теорії?

11. Як визначається ризик для моделі Марковиця?

Тестові завдання до розділу 3

1. *Портфель інвестора дорівнює*

А	Б	В	Г
$V_t = B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t)$	$V_t = H_t B_t + \sum_{n=1}^{N} S_n(t)$	$V_t = H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t)$	$V_t = \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t)$

2. *Цінова міра існує тоді і лише тоді, коли не існує домінантної стратегії.*

А	Б	В	Г
не існує домінантної стратегії.	*існує арбітражна стратегія*	*не виконується закон однієї ціни*	$\sum_{n=1}^{N} \pi_n = 1$

3. *Скільки моментів часу має* модель ринку цінних паперів з одним періодом?

А	Б	В	Г
n	*1*	*2*	*безліч*

4. *Нехай маємо 2 сценарії та* $r=1,\ N=1,\ S(0)=2,\ S(1,\omega_1)=6;\ S(1,\omega_2)=10.$ *Знайти розмір портфеля при* $t=1$ *для першого сценарію.*

А	Б	В	Г
$2H_0 + 6H_1$	$2H_0 + \frac{5}{3}H_1$	$2H_0 + 10H_1$	$2H_0 + \frac{3}{5}H_1$

5. *Нехай* $B_0=1,\ B_1=2,\ S(0)=4, S(1,\omega_1)=6,\ S(1,\omega_2)=10.$ *Знайти цінову міру.*

А	Б	В	Г
$(1;0)$	$\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

6. *Нехай маємо 2 сценарії та* $r=1,\ N=2,\ S_1(0)=2,\ S(1,\omega_1)=6;\ S(1,\omega_2)=10;\ S_2(0)=4,$ $S(2,\omega_1)=4;\ S(2,\omega_2)=6.$ *Знайти цінову міру.*

А	Б	В	Г
$(0;1)$	*не існує*	$(1;0)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$

7. *Нехай* $r=1,\ N=1,\ S_1(0)=2,\ S(1,\omega_1)=12;\ S(1,\omega_2)=8.$ *Тоді*

А	**Б**	**В**	**Г**
домінантна стратегія не існує	*виконується закон однієї ціни*	*домінантна стратегія існує та дорівнює* $H(8;-1)$	*Існує цінова міра*

8. *Арбітражна стратегія не існує тоді і тільки тоді коли …*

А	**Б**	**В**	**Г**
існує нейтральна міра	*виконується закон однієї ціни*	*не існує цінової міри*	*існує домінантна стратегія*

9. *Нехай* $r=0,\ N=1,\ S_1(0)=10,\ S(1,\omega_1)=12;\ S(1,\omega_2)=10.$ *Яка з наступних стратегій є арбітражною?*

А	**Б**	**В**	**Г**
$H(-1;-10)$	*не існує*	$H(10;-1)$	$H(-10;1)$

10. *Нехай* $r=0,25;\ \ S(0)=3,\ S(1,\omega_1)=7,5;\ S(1,\omega_2)=6,25.$ *Скільки існує нейтральних мір?*

А	**Б**	**В**	**Г**
одна	*безліч*	*дві*	*жодної*

Додатки

1.Моделі зміни ціни грошей. Прості відсотки.

Капітал інвестора у довільний момент t : $V(t)=(1+tr)P$, де $P-$ базова сума, яка є постійною, $r-$ відсоткова ставка за 1 рік, $t-$ період часу, який вимірюється в роках.	***Капітал інвестора у довільний момент m:*** $V(m)=\left(1+\frac{m}{12}r\right)P$, де $P-$ базова сума, яка є постійною, $r-$ відсоткова ставка за 1 рік, $m-$ період часу в місяцях.
Капітал інвестора у довільний момент n: $V(n)=\left(1+\frac{n}{365}r\right)P$, де $P-$ базова сума, яка є постійною, $r-$ відсоткова ставка за 1 рік, $n-$ період часу, який вимірюється у днях.	***Коефіцієнт росту для схеми простих відсотків:*** $k=1+tr$; Відсоткова ставка за певний період $r_T=r\cdot T$, $r-$ відсоткова ставка за 1 рік, $T-$ період дії угоди.
Ефективність інвестицій при простих відсотках: $K(s,t)=(t-s)r$, Адитивність ефективності: $K(0,t)=K(0,s)+K(s,t),\ s<t.$	***Формула дисконтування:*** $V(0)=\frac{V(t)}{1+rt}$. Дисконт суми $V(t)$: $D(t)=V(t)-V(0)$.
Відсоткова ставка: $r=K(0,1)$	***Коефіцієнт дисконтування:*** $(1+rt)^{-1}$.

2. Моделі зміни ціни грошей. Складні відсотки: періодичне нарахування.

Капітал інвестора у момент часу t $V(t)=P(1+r)^t$ $V(t)=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{tm}$	***Коефіцієнт росту*** ***(нарощення)*** $(1+r)^t$ $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{tm}$	***Дисконтований капітал*** $V(0)=V(t)\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-tm}$ $V(0)=V(t)(1+r)^{-t}$	***Коефіцієнт дисконтування*** $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-tm}$ $(1+r)^{-t}$
Капітал за обліковою ставкою % $V(\mathrm{t})=P\frac{1}{(1-\mathrm{d})^t}$ $V(\mathrm{t})=P\frac{1}{(1-f/m)^{mt}}$	***Коефіцієнт нарощення за обліковою ставкою %*** $(1-\mathrm{d})^{-t}$ $(1-f/m)^{-mt}$	***Ефективність складних %*** $K(s,t)=\frac{V(t)-V(s)}{V(s)}$, $K(s,t)\neq K(s,p)+K(p,t)$, $s<p<t$	***Ефективна річна ставка*** r_{ef} ***для номінальної*** j $r_{ef}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$

3. Потоки платежів: ануїтет. Складні відсотки: неперервне нарахування.

Ціна ануїтету пренумерандо тривалістю n років з виплатою C із ставкою складних % $P = C \cdot \ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	***Коефіцієнт ануїтету пренумерандо*** $\ddot{a}_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r/(1+r)}$	***Ціна ануїтету постнумерандо тривалістю n років з виплатою C із ставкою складних %*** $P = C \cdot a_{\overline{n}\rceil}$	***Коефіцієнт ануїтету постнумерандо*** $a_{\overline{n}\rceil} = \dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
Капітал у момент t при неперервному нарахуванні % $V(t) = e^{t\delta} P$	***Коефіцієнт росту неперервних складних %*** $e^{t\delta}$	***Дискретна та неперервна ставки складних %*** $\delta = \ln(1+r)$	***Ефективна ставка r_{ef} для неперервних складних %*** $r_{ef} = e^{\delta} - 1$

4. Безризикові фінансові активи.

Ціна (сучасна вартість) облігації з нульовим купоном з номіналом F строком погашення через T років ***при складному нарахуванні %*** $V(0) = F \cdot (1+r)^{-T}$ ***при складному періодичному нарахуванні %*** $V(0) = F \cdot \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-Tm}$ ***при складному неперервному нарахуванні %*** $V(0) = F \cdot e^{-rT}$	**Ціна облігації з нульовим купоном з номіналом F у момент $t \le T$** ***при складному нарахуванні %*** $B(t,T) = F \cdot (1+r)^{-(T-t)}$ ***при складному періодичному нарахуванні %*** $B(t,T) = F \cdot \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-m(T-t)}$ ***при складному неперервному нарахуванні %*** $B(t,T) = F \cdot e^{-r(T-t)}$
Ціна (сучасна вартість) облігації з номіналом F і виплатою купона C в кінці кожного року строком погашення через T років	
при складному нарахуванні % $V(0) = C \cdot \dfrac{1-(1+r)^{-T}}{r} + F \cdot (1+r)^{-T}$	***при складному неперервному нарахуванні %*** $V(0) = C \cdot \dfrac{1-e^{-Tr}}{e^{r}-1} + F \cdot e^{-Tr}$

5. Ризикові фінансові активи.

Ціна акції $S(t)-$ нефіксована величина: залежить від ефективності діяльності емітента та зовнішніх обставин.	***Коефіцієнт повернення за період*** $[n;m]$ $$K(n,m)=\frac{S(m)-S(n)}{S(n)}.$$
Ціна акції $$S(n)=S(n-1)(1+K(n)),$$ де $$K(n)=K(n,\ n-1)=\frac{S(n)-S(n-1)}{S(n-1)}$$	***Властивості коефіцієнта повернення*** **А)** $1+K(n,m)=$ $=(1+K(n+1))(1+K(n+2))\cdot\ldots\cdot(1+K(m))$ **Б)** не адитивний.
Очікуване повернення-це математичне сподівання розподілу коефіцієнта повернення	

6. Вторинні фінансові активи.

***Call* опціон** дає право його власнику купити акцію за фіксованою ціною K у момент реалізації T опціону**.**	***Put* опціон** дає право його власнику продати акцію за фіксованою ціною K у момент реалізації T опціону.
Виплата за європейським *call* опціоном $(S_T-K)_+$	**Виплата за європейським *put* опціоном** $(K-S_T)_+$
S_t - ціна акції в момент часу $t\geq 0$, T - момент реалізації або дата виконання опціона, K - страйкова ціна, ціна виконання опціона.	
Якщо інвестор у майбутній момент T планує продати деякі активи і придбав європейський *put* опціон за ціною P_p на ці активи з датою виконання T, то прибуток інвестора дорівнює $$\Pr(S_T)=\begin{cases}K-(S+P_p)e^{r(T-t)}, & S_T\leq K,\\ S_T-(S+P_p)e^{r(T-t)}, & S_T>K.\end{cases}$$	**Якщо інвестор у майбутній момент T планує придбати деякі активи і придбав європейський *call* опціон за ціною P_c на ці активи з датою виконання T, то прибуток інвестора дорівнює** $$\Pr(S_T)=\begin{cases}-S_T+(S-P_c)e^{r(T-t)}, & S_T\leq K,\\ -K+(S-P_c)e^{r(T-t)}, & S_T>K.\end{cases}$$

7. Модель ринку цінних паперів з одним періодом.

Головні характеристики моделі $H=(H_0,H_1,...,H_N)$ - ***стратегія (портфель)*** інвестора. H_0 – кількість у.о. на рахунку, $H_i, i=1,...,N$ – кількість i-ї акції. ***Розмір (ціна, вартість) портфеля*** інвестора $V_t=H_0B_t+\sum_{n=1}^{N}H_n\,S_n(t),\ V_1=V_1(\omega_i), i=1,...,k.$ ***Дохід*** інвестора $G=V_1-V_0=H_0r+\sum_{n=1}^{N}H_n\,\Delta S_n,\ \ \Delta S_n=S_n(1)-S_n(0).$ **Нормовані характеристики моделі** $S_n^*(t)=\dfrac{S_n(t)}{B_t},\ V_t^*=\dfrac{V_t}{B_t},\ G^*=V_1^*-V_0^*,\ \Delta S_n^*=S_n^*(1)-S_n^*(0).$

Домінантна стратегія Стратегія $\hat{H}$ – ***домінантна,*** якщо $\exists\tilde{H}:\hat{V}_0=\tilde{V}_0$, але $\hat{V}_1(\omega)>\tilde{V}_1(\omega),\ \forall\omega\in\Omega.$ ***Твердження 1.*** *Домінантна стратегія існує* $\Leftrightarrow\ \exists H:V_0=0, V_1(\omega)>0,\forall\omega\in\Omega.$ ***Твердження 2.*** *Домінантна стратегія існує* $\Leftrightarrow\ \exists H:V_0<0, V_1(\omega)\ge 0,\forall\omega\in\Omega.$	**Цінова міра** Вектор $\pi=(\pi(\omega_1),...,\pi(\omega_k))$ називається ***ціновою мірою***, якщо $\pi_i=\pi(\omega_i)\ge 0,\forall i=\overline{1,k},\ \sum\pi_i=1$ та $V_0^*=E_\pi V_1^*(\omega)=\sum_{i=1}^{k}\pi_i V_1^*(\omega_i)$ для довільної стратегії H.

Теорема 1. Цінова міра існує тоді і лише тоді, коли не існує домінантної стратегії.
Твердження 3. *Міра* π *- цінова* $\Leftrightarrow$ *коли* π *- ймовірнісна міра на* Ω*, для якої* $S_n^*(0)=E_\pi S_n^*(1)=\sum_{i=1}^{k}\pi_i S_n^*(1,\omega_i),\ n=1,...,N.$

Для моделі ринку цінних паперів виконується ***закон однієї ціни (ЗОЦ)*** якщо не існує двох різних стратегій $\hat{H}$ та $\tilde{H}$ таких, що $\hat{V}_1(\omega)=\tilde{V}_1(\omega),\forall\omega\in\Omega,$ але $\hat{V}_0\ne\tilde{V}_0.$	***Твердження 4.*** *Якщо не існує домінантної стратегії, то виконується ЗОЦ. Обернене твердження не завжди правильне.*

8. Арбітражні стратегії.

<table>
<tr><th>Арбітражна стратегія</th><th>Нейтральна міра</th></tr>
<tr><td>Стратегія H називається арбітражною, якщо виконуються умови
AS1) $V_0 = 0,$
AS2) $V_1 \ge 0,\ \forall \omega \in \Omega,$
AS3) $E[V_1] > 0$.
Із умов AS2 - AS3 $\Rightarrow\ \exists \omega_0 : V_1(\omega_0) > 0.$

Твердження 1. Якщо існує домінантна стратегія, то існує арбітраж. Обернене твердження не завжди правильне.
Твердження 2. Арбітражна стратегія існує $\Leftrightarrow$ існує стратегія H, для якої
1) $G^*(\omega) \ge 0, \forall \omega \in \Omega,$
2) $E[G^*] > 0.$</td><td>Ймовірнісна міра Q на Ω називається нейтральною або нейтральною до ризику, якщо

NM1) $Q(\omega) > 0,\ \forall \omega \in \Omega,$
NM2) $E_Q[\Delta S_n^*] = 0, \forall n = 1, 2, ..., N.$

NM2 $\Leftrightarrow$ $S_n^*(0) = E_Q[S_n^*(1)],\ n = 1, ..., N.$

Остання рівність співпадає із означенням цінової міри. Але відмінність між ними є: $Q(\omega) > 0,\ \forall \omega \in \Omega,$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теорема 1. Арбітражна стратегія не існує тоді і лише тоді, коли існує нейтральна міра.</td></tr>
</table>

9. Модель Марковиця.

<table>
<tr><td>Дохідність портфелю
$$R = \sum_{n=1}^{N} \omega_n R_n.$$
А середній прибуток :
$$E[R] = \sum_{n=1}^{N} \omega_n E[R_n].$$</td><td>Вага активу у портфелі інвестора
$$w_n = \frac{H_n S_n(0)}{V_0},$$
де
$$V_0 = \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0).$$</td></tr>
<tr><td>Ризик портфеля інвестора
$$\mathrm{var}[R] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j \,\mathrm{cov}[R_i R_j],$$</td><td>Середній прибуток портфелю в моделі Марковіца
$$\mu = (1-s)\mu_1 + s\mu_2,$$
а його ризик
$$\sigma^2 = (1-s)^2\sigma_1^2 + s^2\sigma_2^2 + 2s(1-s)\rho\sigma_1\sigma_2,$$</td></tr>
</table>

Таблиця значень коефіцієнта нарощення $(1+r)^n$

Ставка відсотку $r\%$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,1
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5939	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3580
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7909	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8857	2,1329	2,4099	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8010	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1773

Відповіді до тренувальних тестів

номер тесту / номер завдання	Тест до розділу 1	Тест до розділу 2	Тест до розділу 3
1	**Б**	**А**	**В**
2	**А**	**Б**	**А**
3	**Б**	**Б**	**В**
4	**Б**	**А**	**А**
5	**А**	**Г**	**Г**
6	**А**	**А**	**Б**
7	**В**	**А**	**Б**
8	**Б**	**А**	**Б**
9	**Б**	**А**	**Г**
10	**А**	**Г**	**А**

Список літератури.

1. *Барбаумов В. Е., Гладких И.М., Чуйко А.С.* Сборник задач по финансовым инвестициям. − Москва «Финансы и статистика», 2005, − 321 с.
2. *Борисенко О. Д.* Збірник задач з фінансової математикита. / О. Д. Борисенко, Ю. С. Мішура, В. М. Радченко, Г. М. Шевченко − Київ , 2007, − 252 с.
3. *Григоркiв В. С., Ярошенко О.І., Нікіфоров П.О.* Фінансова математика. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – 488 с.
4. *Галиц Л.* Финансовая инженерия. Инструменты и способы управления финансовым рынком. – М.: ``ТВП", 1998. – 576 с.
5. *Єндовицький Д. А., Коробейников Л. С., Сысоева Е. Ф* Практикум по інвестиційному аналізу: Навчальний пос / під ред. Д. А. Єндовицького. — М.: Фінанси і статистика, 2001. — 240 с.
6. *Жуленев С. В.* Финансовая математика: введение в классическую теорию. – М.: Изд-во МГУ, 2001
7. *Капитоненко В. В.* Задачи и тесты по финансовой математике: учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2007. - 256 с.
8. *Кирлица, В. П.* Финансовая математика: рук. к решению задач:учеб. пособие / В. П. Кирлица. − Мн.: ТетраСистемс, 2005. −192 с.
9. *Клесов О.І.* Фінансова математика. – (електронний конспект лекцій), 2016. – 280 с.
10. *Ковалев В.В*. Сборник задач по финансовому анализу. - М.: Финансы и статистика, 1997. -128 с
11. *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики. – М.: Дело, 1998.– 304 с.
12. *Половникова В.А.* Финансовая математика: Математическое моделирование финансовых операций: Учеб. пособие / Под ред. В.А. Половникова и А.И. Пилипенко. – М.: Вузовский учебник, 2004. – 360 с.
13. *Фалин Г.И.* Введение в актуарную математику. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. — 140 с.
14. *Фалин Г.И, Фалин А.И.* Актуарная математика в задачах. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. – 192 с.
15. *Фельмер Г., Шид А.* Стохастические финансы. Дискретное время. — К: 2006. — 448 с.
16. *Халл Дж.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – М.: ``Вильямс", 2008. – 1024 с.
17. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. – Москва: «Дело», 2000. – 398 с.

18. *Щиршов Е. В.* Финансовая математика: учебное пособие. / Е.В. Ширшов, Н.И. Петрик, А.Г. Тутыгин, Т.В. Меньшикова. — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: КНОРУС, 2010. — 144 с.
19. *Baxer M., Rennie A.* Financial calculus: An introduction to derivative pricing/ – Cambridge: Cambridge University Press, 1996. – 233 p.
20. *Capinski M., Zastawniak T.* Mathematics for Finance: An introduction to financial engineering. – London: Springer Verlag, 2011. – 322 p.
21.*Dana R. A., Jeanblanc M.* Financial Markets in Continuous Time. – Berlin: Springer-Verlag, 2002.
22. *Elliott R., Kopp P. E. Mathematics of Financial Markets. – New York: Springer Finance, 1998.*
23.*Etheridge A.* Financial Calculus – Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
24. *Gerber H. U.* Life Insurance Mathematics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 217 p.
25.*Mak D. K.* The Science of Financial Market Trading. – NewJesey: World Scientific, 1997
26.*Neftci Salih N.* An Introduction to the Mathematics of Financi-al Derivatives. – San Diego, CA: Academic Press, 1996.
27. *Pliska S.* Introduction to Mathematical Finance. Discrete Models. – Oxford: Blackwell Publishers Ltd., 1997. – 272 p.
28. *Roman S.* Introduction to the Mathematics of Finance. – New York: Springer Verlag, 2004. – 354 p.
29.*Varian H. R.* (ed.) Computational Economics and Finance.Modeling and Analysis with Mathematica. – New York: Springer, 1996.
30.*Willett A.H.* The economic Theory of Risk and Insurance. Philadelphia University of Pennsylvania Press. — 1951.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК